

Μεταπτυχιακό Μαθηματικών Αγοράς Παραγωγής  
Παίγνια και Διαπραγματεύσεις – Οκτώβριος 2016

Απαντήστε σε όλα τα θέματα.

**Θέμα 1**

A. **70%** Μία επένδυση απαιτεί αρχικό κεφάλαιο 200 χιλ. €. Με ευνοϊκή οικονομική συγκυρία (πιθανότητα 30%) θα έχει συνολικά έσοδα 240 χιλ. € ενώ με δυσμενή συγκυρία έσοδα 160 χιλ. €. Ο επενδυτής μπορεί να κάνει μία έρευνα αγοράς A που θα κοστίσει 10 χιλ. €, προκαταβλητέα. Η έρευνα θα προβλέψει αν θα ισχύσει ευνοϊκή ή δυσμενής συγκυρία. Αν η συγκυρία είναι ευνοϊκή η έρευνα θα το προβλέψει με πιθανότητα 80%. Αν η συγκυρία είναι αρνητική, η έρευνα θα προβλέψει ευνοϊκή συγκυρία με πιθανότητα 4%. Εναλλακτικά μπορεί να αναθέσει μία έρευνα αγοράς B που έχει τα ίδια στατιστικά χαρακτηριστικά με την A και που θα πληρωθεί 15 χιλ. μόνο αν η συγκυρία αποδειχθεί ευνοϊκή και την έχει προβλέψει.

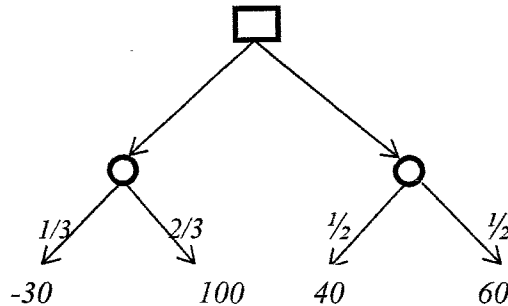
(60%) Τι θα κάνει ο επενδυτής αν έχει γραμμική συνάρτηση ωφελιμότητας;

(10%) Σχολιάστε πώς θα προσδιόριζε την στρατηγική του αν είχε μη γραμμική π.χ. λογαριθμική ωφελιμότητα με γνωστές παραμέτρους.

B. **30%** Ένας συντηρητικός αποφασίζων έχει λογαριθμική ωφελιμότητα ως προς τα χρήματα, δηλαδή  $U(x) = \log(x+B)$ . Είναι αδιάφορος μεταξύ μίας κλήρωσης που δίνει 100 ή 20 χρηματικές μονάδες με πιθανότητα 50% και εναλλακτικά ενός βέβαιου ποσού 50 μονάδων.

- (5%) Δείξτε ότι η επιλογή σας είναι ανεξάρτητη από την βάση του λογαρίθμου

- (25%) Ποια επιλογή θα κάνει στο παρακάτω δένδρο αποφάσεων;



**Θέμα 2**

Σε ένα τυχερό παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, ο I επιλέγει τυχαία ένα χαρτί που είναι Κόκκινο ή Μαύρο με πιθανότητα  $1/3 - 2/3$ . Αφού δει το χαρτί του, είτε

- δείχνει το χαρτί του και κερδίζει 100 μονάδες αν είναι κόκκινο ενώ χάνει το ίδιο ποσό αν είναι Μαύρο

είτε

- «διπλασιάζει» το στοίχημα

Ο II

- είτε δεν αποδέχεται τον διπλασιασμό οπότε χάνει 100 μονάδες,
- είτε τον αποδέχεται οπότε χάνει 200 μονάδες αν το χαρτί του I είναι κόκκινο ενώ κερδίζει το ίδιο ποσό διαφορετικά,
- είτε τέλος ξαναδιπλασιάζει τα στοίχημα οπότε χάνει 400 με κόκκινο του I ή κερδίζει το ίδιο ποσό με μαύρο του I.

Πώς θα παίξουν οι δύο παίκτες; Συγκεκριμένα γράψτε την εκταταμένη και την κανονική μορφή και εντοπίστε την βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη.

### Θέμα 3

**α 60%** Έστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος, με τον I να μεγιστοποιεί:

2	1	3
5	0	1,5
3	2	2
0	1	2
1	3	4

Υπολογίστε την αξία του και την στρατηγική ισορροπίας των δύο παικτών. Ο I ελέγχει τις γραμμές, ενώ τα στοιχεία του πίνακα υποδηλώνουν το κέρδος του I.

**β 50%.** Δύο εταιρείες, μία “μεγάλη” και μία “μικρή”, ανταγωνίζονται στην αγορά ενός προϊόντος. Τα κόστη παραγωγής και των δύο είναι αμελητέα. Η μεγάλη από τις δύο εταιρείες αναγγέλει πρώτη την τιμή της, ενώ η άλλη εταιρεία έχει δυναμικότητα παραγωγής μέχρι Β μονάδες, και θα αναγγείλει τιμή ελάχιστα κατώτερη από την μεγάλη εταιρεία, οπότε οι συνολικές πωλήσεις των δύο εταιρειών εξαρτώνται από την τιμή  $p$  που ανήγγειλε η πρώτη εταιρεία και ισούνται με  $D(p)=K/(p+M)$  με  $K, B, M$  γνωστές σταθερές.

(40%) Ποιά τιμή θα αναγγείλει η εταιρεία Α;

(10%) Ποιά τιμή θα ανήγγελε αν δεν υπήρχε η μικρή εταιρεία και επιπλέον η «ρυθμιστική αρχή» επιβάλλει τιμές μικρότερες από κάποια τιμή  $p_{max}$ .

### Θέμα 4

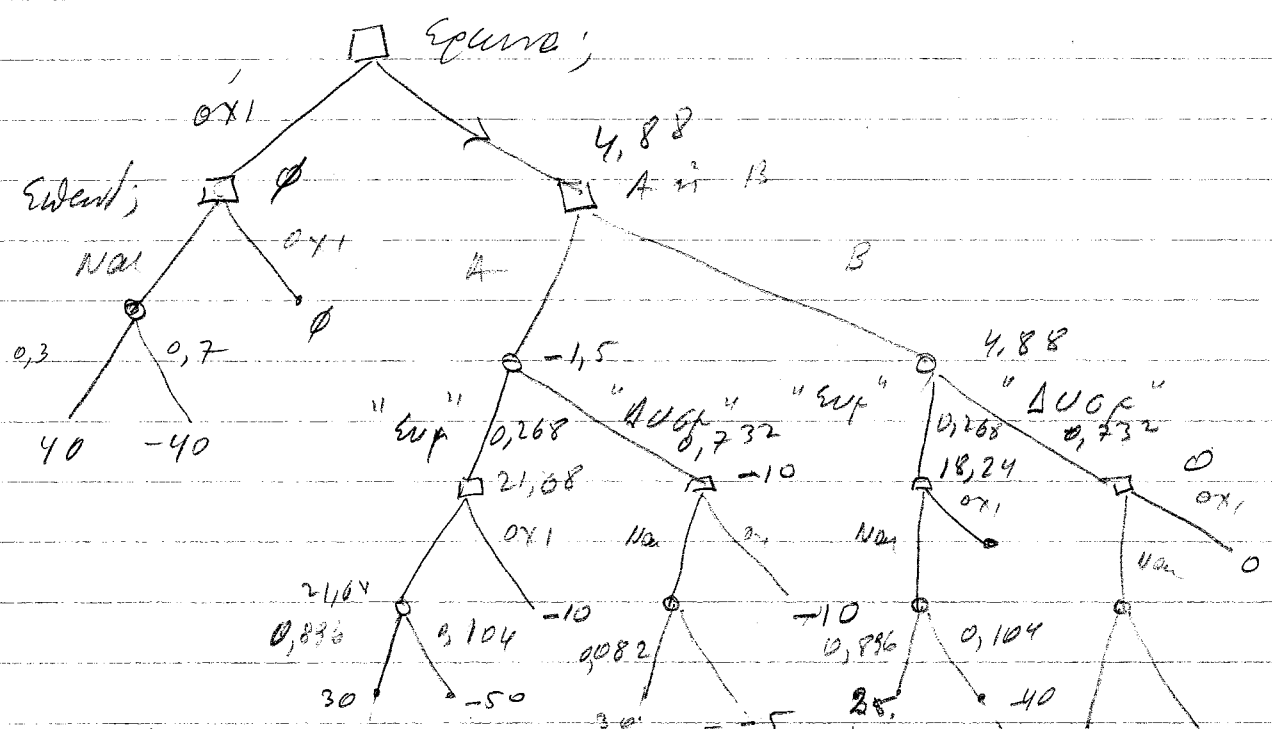
1. **70%** Ένας επενδυτής έχει τετραγωνική ωφελιμότητα αύξουσα ως προς την απόδοση  $r$  των επενδύσεών του. Μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία, εκ των οποίων το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 5%, τυπική απόκλιση 10% ενώ το δεύτερο 15% και 25% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων 0,5. Επίσης μπορεί να επενδύσει ή να δανεισθεί σε ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 4%. Παρατηρούμε ότι ο επενδυτής δανειζεται 20% του κεφαλαίου του. Τι επένδυσε στα αβέβαια περιουσιακά στοιχεία;

**Υπόδειξη:** Υπολογίστε το χαρτοφυλάκιο της αγοράς..

2. **50%** Δύο παίκτες «βάζουν πόδια». Απέχουν μεταξύ τους 10 πόδια, και βάζουν εναλλάξ ένα ή μισό πόδι. Ποιος παίκτης θα κερδίσει, αυτός που παίζει πρώτος ή αυτός που παίζει δεύτερος και αν κερδίζει ποιά είναι η στρατηγική που κερδίζει; Το «πάτημα» πρέπει να είναι πλήρες...

**Προαιρετικά (+20%)** Αλλάζει το αποτέλεσμα αν ο κάθε παίκτης μπορεί να βάλει το πολύ μία «μύτη» σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού; Μύτη σημαίνει ότι δεν προχωρεί...

1. 70%



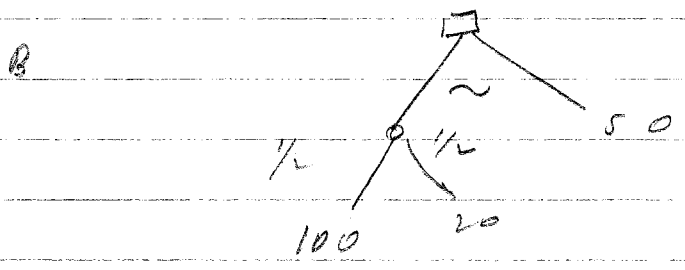
$$P(\text{"Επιλογή"}) = P(\text{"Επιλογή"} | \text{κακή})P(\text{κακή}) + P(\text{"Επιλογή"} | \text{καλή})P(\text{καλή})$$

$$= 0,8 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,028 = 0,268$$

$$P(\text{"Αύξηση"}) = 1 - 0,268 = 0,732$$

$$P(\text{Επιλογή} | \text{"Επιλογή"}) = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,268} = \frac{0,240}{0,268} = 0,896$$

$$P(\text{Αύξηση} | \text{"Αύξηση"}) = \frac{0,7 \cdot 0,96}{0,732} = \frac{0,672}{0,732} = 0,918$$



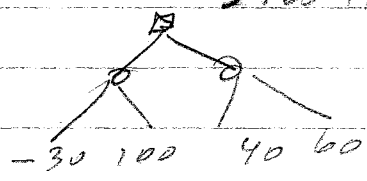
$$\log(50+B) = \frac{1}{2} \log(100+B) + \frac{1}{2} \log(20+B)$$

$$(50+B)^2 = (100+B)(20+B)$$

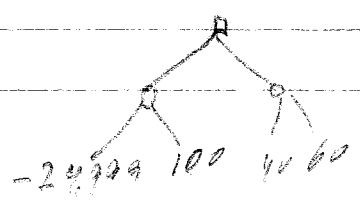
$$2500 + 100B + B^2 = 2000 + 120B + B^2$$

$$500 = 20B \quad B = 25$$

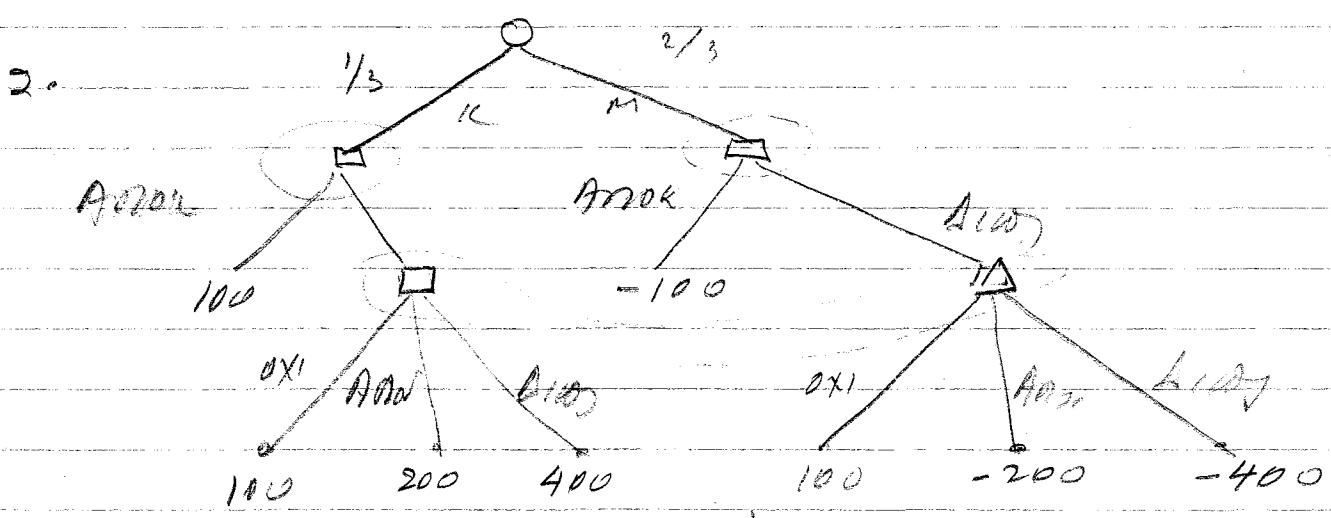
Εξο δαδρρρ



η επιλογή επιλογής είναι χερσική από την



Αρα η επιλογή είναι χερσική από την

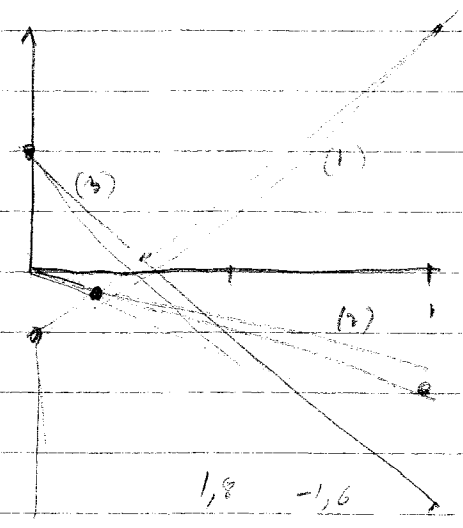


I \ II	OX1	A	B
K	100	$\frac{1}{3}200 + \frac{2}{3}(-200)$	$\frac{1}{3}400 + \frac{2}{3}(-400)$
M	100	$\frac{1}{3}200 + \frac{2}{3}(-100)$	$\frac{1}{3}400 + \frac{2}{3}(-100)$

	OX1	A	B
0,3 A	100	$-200/3$	$-400/3$
0,3 A	$-100/3$	0	$200/3$
A	100	-100	$-700/3$
A	$-100/3$	$-100/3$	$-100/3$

3	-2	-4
-1	0	2



$\min \{-1+4n, -2n, 2-6n\}$   
 $-1+4n = -2n \rightarrow (1) - (2)$   
 $6n = 1$   
 $n = 1/6$

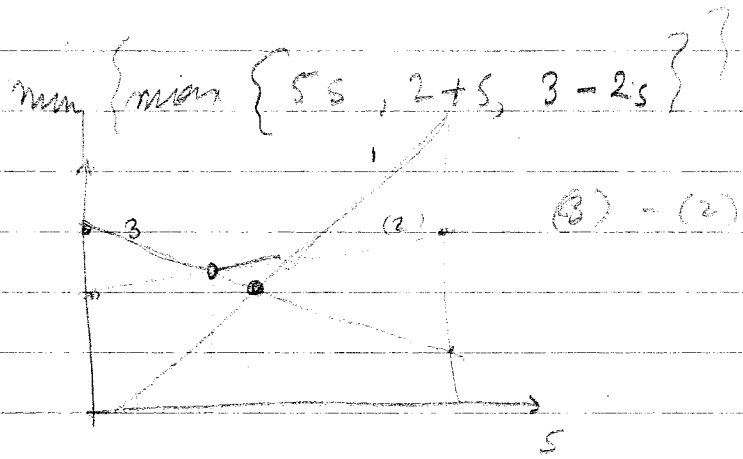
max min  $\{ \} = -1/3$

3	-2
-1	0

$3s + (1-s)(-2) = -s$   
 $-2 + 5s = -s$

$s = 1/3$        $V_{II} = -1/3$

$$\begin{matrix} 3, & & & & \\ 0 & & & & \\ 2/3 & & & & \\ & & & & \\ 1/6 & & & & \end{matrix} \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 15 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right]$$



$$2+s = 3-2s$$

$$3s = 1 \quad s = 1/3$$

$$n \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1+2n = 3-n \rightarrow n = 2/3$$

$$6 \quad \hat{D}(p) = \frac{K}{p+m} - B$$

$$\text{Max} \quad p \left( \frac{K}{p+m} - B \right) = \hat{D}(p) p$$

$$\left( \hat{D}(p) p \right)' = \frac{K}{p+m} - B - p \frac{K}{(p+m)^2} = 0$$

$$(p+m)K - B(p+m)^2 - pK = 0$$

$$pK + mK - pK - B(p+m)^2 = 0$$

$$\left( \frac{mK}{B} \right)^{1/2} - m = p$$

$$\text{max} \quad pK/p+m = K \left( 1 - \frac{m}{p+m} \right)$$

By an analogous way w.r.t. p, we get  $p = p_{max}$

$$4. a. C = \begin{pmatrix} 1/10^2 & 1/2 \cdot 1/10 \cdot 1/4 \\ 1/2 \cdot 1/10 \cdot 1/4 & (1/4)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/100 & 1/80 \\ 1/80 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{400} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R/r = 1 = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 15/4 \end{pmatrix} - 1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 11/4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 - 55 \\ -5 + 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$n = \left( -\frac{30}{9}, \frac{29}{9} \right) \Rightarrow \gamma_1 = 100 \left( -\frac{30}{9} \right) \% \quad \gamma_2 = 100 \cdot \frac{29}{9} \%$$

1. Μερικά σε μία σειρά.

Καμία αβία και μια αβία στην επόμενη.  
 Αρα και αβία γάβου από 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.  
 Αρα και αβία γάβου από 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



Καμία αβία και αβία από 2 + 3k  
 Αρα ο άρτιος και γάβου 2 + 3 · 6 = 20



Οι "πίτες" σε αυτήν την ομάδα.  
 Τι θα γράψουν οι "πίτες" στις πίτες  
 ε (δηλ. ε = 1/10);