

Συνδυαστικά Παιγνία

1. Σε ένα παίγνιο 2 παικτών μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες αναγγέλουν εναλλάξ ένα αριθμό μεταξύ $\{2,3,4\}$. Ο παίκτης που κάνει το άθροισμα των αριθμών που έχουν αναγγελθεί να φθάσει ή να ξεπεράσει το 8 χάνει. Αν ο παίκτης I παίζει πρώτος, ποιός παίκτης θα κερδίσει;
2. Σε ένα παίγνιο δύο παικτών, οι παίκτες αναγγέλουν εναλλάξ ένα αριθμό που είναι είτε 1 είτε 3. Χάνει ο παίκτης που προξενεί το άθροισμα των ήδη αναγγελθέντων αριθμών να φθάσει ή να ξεπεράσει το 10. Αν παίζει πρώτος ο παίκτης I, πώς πρέπει να παίζει για να κερδίσει;

Διαμόρφωση Παιγνίων

1. Σε ένα παίγνιο 2 παικτών μη μηδενικού αθροίσματος ο παίκτης I διαθέτει τρεις επιλογές $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ενώ ο II διαθέτει δύο επιλογές τ_1 , και τ_2 . Ο I παίζει πρώτος, και ο II που παίζει δεύτερος μπορεί να αναγνωρίσει αν ο I έχει παίζει το σ_3 ή όχι, δεν μπορεί όμως να ξεχωρίσει μεταξύ σ_1, σ_2 . Τα κέρδη για τους δύο παίκτες ανάλογα με τις επιλογές τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	τ_1	τ_2
σ_1	(3,1)	(2,2)
σ_2	(5,3)	(3,5)
σ_3	(1,2)	(2,1)

Γράψατε το δένδρο του παραπάνω παιγνίου (εκτεταμένη μορφή) προσέχοντας τα πληροφοριακά σύνολα. Προσδιορίστε τις στρατηγικές κάθε παίκτη και γράψατε την κανονική μορφή. Τέλος εξετάσατε αν υπάρχει ένα ή περισσότερα σημεία ισορροπίας. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα ποιό θα επιλέγατε;

Θέματα σε Παιγνία Μηδενικού Αθροίσματος

1. Εστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος:

4	1	3
1	3	2

Υπολογίστε την αξία του και την στρατηγική ισορροπίας του παίκτη I (που ελέγχει τις γραμμές).

2. Εστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος:

4	3	3
5	1	7
2	6	1

Εξετάστε αν η μεικτή στρατηγική $(1/5, 1/5, 3/5)$ για τον παίκτη I (γραμμές) είναι στρατηγική ισοροπίας.

3. Εστω ότι δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις που παράγουν το ίδιο προϊόν διαφημίζονται στην τηλεόραση. Κάθε επιχείρηση πρόκειται να βάλει από μία διαφήμιση κάθε βράδυ αλλά μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε τρεις ζώνες προβολής της διαφήμισης. Στην ζώνη A παρακολουθεί το 50% των υποψηφίων πελατών, στην ζώνη B το 30% και στην ζώνη Γ το 20%. Οι πελάτες της κάθε ζώνης πάνε όλοι στην εταιρεία που εβανε τις περισσότερες διαφημίσεις στην ζώνη τους, ενώ μοιράζονται στις δυο εταιρείες αν μπει ίδιος αριθμός διαφημίσεων. Τι ποσοστό της αγοράς θα πάρει η κάθε εταιρεία;

4. Εστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος:

1	1	-1
1	0	-1
-2	0	2

Υπολογίστε την αξία του και τις στρατηγικές ισοροπίας των δύο παικτών.

5. Δύο παίκτες I και II αναγγέλουν ταυτόχρονα Κορώνα (Κ) ή Γράμματα (Γ). Αν και οι δύο αναγγείλουν Κ ο I κερδίζει από τον II 2 Δρχ., ενώ αν και οι δύο αναγγείλουν Γ ο I κερδίζει από τον II 1 Δρχ. Αν αναγγείλουν διαφορετικές όψεις του νομίσματος τότε ο I πληρώνει στον II 3 Δρχ. Ποιές είναι οι στρατηγικές ισοροπίας των δύο παικτών;

6. Εξετάστε αν η μεικτή στρατηγική $(1/4, 1/4, 0, 1/2)$ είναι στρατηγική ισοροπίας για τον παίκτη I (γραμμές) στο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος :

1	4	1	3
2	1	3	4

7. Εστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος:

2	1	3
3	2	2
4	3	1

Υπολογίστε την αξία του και την στρατηγική ισορροπίας του παίκτη II (που ελέγχει τις στήλες).

8. Εστω το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών, μηδενικού αθροίσματος:

3	2	4	4
2	1	6	3
2	3	0	1

Επιβεβαιώστε ότι οι μεικτές στρατηγικές $(6/10, 0, 4/10)$ για τον I και $(0, 8/10, 2/10, 0)$ για τον II είναι σε ισορροπία, εξετάζοντας απλώς τον ορισμό των στρατηγικών σε ισορροπία.

Θέματα σε παίγνια μή μηδενικού αθροίσματος

1. Δύο εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν. Αν η πρώτη παράγει ποσότητα π_1 και η δεύτερη ποσότητα π_2 τότε η τιμή πώλησής του προϊόντος θα ισούται με $\tau = 10/(\pi_1 + \pi_2)$ και για τις δύο εταιρείες. Αν το κόστος παραγωγής της πρώτης είναι $K(\pi_1) = \pi_1 + 5$ ενώ της δεύτερης $K(\pi_2) = \pi_2 + 1$, υπολογίστε την τιμή του προϊόντος και τις ποσότητες που θα παραχθούν αν επικρατήσει ισορροπία κατά Nash.

2. Δύο εταιρείες I και II συναγωνίζονται στην ίδια αγορά. Η κάθε μία σκοπεύει να αναπτύξει ένα από δύο προϊόντα A και B. Αν οι εταιρείες αναπτύξουν το ίδιο προϊόν το κέρδος κάθε μίας είναι μηδενικό. Αν αναπτύξουν διαφορετικά προϊόντα, η εταιρεία που θα αναπτύξει το προϊόν A θα κερδίσει 3 μονάδες ενώ η άλλη θα κερδίσει 1 μονάδα. Γράψτε την κανονική μορφή του παιγνίου, εντοπίστε τα σημεία ισορροπίας αν υπάρχουν και σχολιάστε το πως θα εξελιχθεί το παίγνιο.

3. Στο παρακάτω συνεχές παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος οι δύο παίκτες I και II αναγγέλουν αριθμούς x και y αντιστοίχως. Ο I επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την ποσότητα $Z_I = (x-2)^2 + 2(x-y)^2$ ενώ ο II την ποσότητα $Z_{II} = y^2 + 3(x-y)^2$. Αν ο I παίζει πρώτος και ο II παίζει γνωρίζοντας τη επιλογή του I, πώς θα εξελιχθεί το παιχνίδι; Ίδια ερώτηση σε περίπτωση που οι δύο παίκτες παίζουν ταυτόχρονα.

4. Στο παρακάτω συνεχές παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος οι δύο παίκτες I και II αναγγέλουν

αριθμούς x και y αντιστοίχως. Ο I επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την ποσότητα $Z_I = (x-2)^2 + (x-y)^2$ ενώ ο II την ποσότητα $Z_{II} = y^2 + 3(x-y)^2$. Αν οι δύο παίκτες μπορούν να συνεργασθούν, εξετάστε αν οι στρατηγικές $x = 10/9$ και $y = 8/9$ μπορεί να αποτελέσουν μία συμφωνημένη λύση. Υπόδειξη Εξετάστε το σημείο Pareto που προκύπτει με στάθμιση $\lambda = 1/2$.

5. Δύο εταιρείες I, II διαφημίζονται στην Τηλεόραση. Υπάρχουν 2 ζώνες A και B, τις οποίες παρακολουθούν 70 και 30 % των υποψηφίων πελατών αντίστοιχα. Η εταιρεία I σκοπεύει να βάλει μόνο μία (1) διαφήμιση ενώ η II σκοπεύει να βάλει δύο (2) διαφημίσεις. Οι πελάτες κάθε ζώνης θα αγοράσουν το προϊόν της εταιρείας που θα βάλει τις περισσότερες διαφημίσεις αλλά αν έχουμε ίδιο και μη μηδενικό αριθμό διαφημίσεων σε μία ζώνη οι πελάτες της ζώνης μοιράζονται εξ' ίσου μεταξύ των I και II. Σε περίπτωση όμως που σε μία ζώνη δεν μπει καμία διαφήμιση, οι πελάτες της ζώνης δεν αγοράζουν καθόλου το προϊόν, δηλαδή χάνονται τόσο για την εταιρεία I όσο για την εταιρεία II. (α) Γράψτε την κανονική μορφή του παιγνίου και (β) Εντοπίστε το σημείο(-α) ισορροπίας (Nash), αν υπάρχει - ουν.

Διάφορα Θέματα

1. Σε ένα συνεχές παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος ο I αναγγέλει αριθμό x ενώ ο II αριθμό y . Η ζημία του I είναι $K_I(x,y) = x^2 + 3(x-y)^2$. Ποιό (ποιά) είναι το σημείο ισορροπίας του παιγνίου;

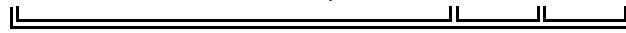
2. Σε ένα παίγνιο, ο παίκτης I παίζει πρώτος και επιλέγει να παιχθεί στην συνέχεια είτε το υποπαίγνιο Π_1 ή το υποπαίγνιο Π_2 με πίνακες κέρδους ως εξής (οι πίνακες είναι με βάση το κέρδος του I και θεωρούνται μηδενικού αθροίσματος) :

Παίγνιο Π_1

		Κίνηση του II	
		Γ	Δ
Κίνηση του I	A	2	0
	B	1	3

Παίγνιο Π_2

		Κίνηση του II	
		Γ	Δ
Κίνηση του I	A	3	0
	B	0	1



Ο παίκτης II παίζει χωρίς να γνωρίζει ούτε την κίνηση του I ούτε και αν παίζεται το Π_1 ή το Π_2 .
Γράψτε το παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή. Πώς θα παίζει ο παίκτης I και ο παίκτης II;