CAPM χωρίς βέβαιο περιουσιακό στοιχείο

Για ένα αποταμιευτή με τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας $U(R) = aR^2 + \beta R + \gamma$, το πρόβλημα χαρτοφυλακίου είναι (με $a \lesssim 0$)

$$\max E(R_p) = \max a\left(Var(\tilde{R}_p) + \beta \bar{R}_p + \gamma\right)$$

με $\tilde{R}_p = \sum_{j=0}^{n} x_j \tilde{R}_j \qquad \sum_{j=0}^{n} x_j = 1$

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει βέβαιο περιουσιακό στοιχείο, το πρόβλημα είναι ως προς την επιλογή από $j=1,2,\dots,n$ περιουσιακά στοιχεία με συνδιακύμανση $c_{ij} = cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$ και αναμενόμενες αποδόσεις $E(\tilde{R}_j) = \bar{R}_j$. Επιπλέον $Var(\tilde{R}_j) \geq 0$ για όλα τα j.
Το πρόβλημα ισοδυναμεί με:

$$\min_{x_j} \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j + \left(\sum_j x_j \bar{R}_j + \beta/2a\right)^2 \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j + \left(\sum_j x_j \bar{R}_j + \beta/2a\right)^2 + \lambda\left(1 - \sum_j x_j\right)$$

Οι συνθήκες βελτίστου είναι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + 2\left(\sum x_j \bar{R}_j + \beta/2a\right)\bar{R}_i - \lambda = 0$$

Οι σχέσεις γράφονται με πίνακες:

$$Cx = \frac{\lambda}{2} \cdot \bar{1} - \left(\sum x_j \bar{R}_j + \beta/2a\right)\bar{R} \qquad (1)$$

όπου $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_n \end{pmatrix}$ $\quad C$: πίνακας $(n \times n)$, $C = \{c_{ij}\}$

Για να ικανοποιηθεί το λ χρησιμοποιείται η συνθήκη $\Sigma x_j = 1$ n^2

$$1 = 1'x = \frac{\lambda}{2}\, 1'C^{-1}1 - \left(\Sigma x_j \bar{R}_j + \beta/2a\right)(1'C^{-1}\bar{R})$$

Έστω ότι για παραμέτρους β_1, β_2 αντιστοιχούν πολλαπλασιαστές λ_1, λ_2 και λύσεις x^1, x^2, δηλαδή

$$Cx^j = \frac{\lambda^j}{2}\cdot \bar{1} - \left(x^j\bar{R} + \beta^j/2a\right)\bar{R} \qquad j=1,2$$

Έστω αριθμός γ. Πολλαπλασιάζοντας την μία σχέση με γ και την άλλη με $1-\gamma$ έχουμε

$$C\left(\gamma x^1 + (1-\gamma)x^2\right) = \frac{\gamma\lambda^1 + (1-\gamma)\lambda_2}{2}\,\bar{1} - \left((\gamma x^1 + (1-\gamma)x^2)'\bar{R} + \frac{\gamma\beta^1 + (1-\gamma)\beta^2}{2}\right)\bar{R} \qquad (2)$$

Η (2) δείχνει ότι για παράμετρο $\beta_\gamma = \gamma\beta^1 + (1-\gamma)\beta^2$, ο γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων x^1, x^2 και ο γρ. συνδυασμός των πολλαπλασιαστών είναι λύση του προβλήματος καθώς $1'(\gamma x^1 + (1-\gamma)x^2) = \gamma\cdot 1 + (1-\gamma)\cdot 1 = 1$.
Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε λύση του χαρτοφυλακίου (για οποιαδήποτε παράμετρο ωφελιμότητας β) είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο χαρτοφυλακίων x^1 και x^2, τα δε x^1, x^2 είναι αυθαίρετα.

Έστω τώρα ότι όλοι οι επενδυτές έχουν τετραγωνικές ωφελιμότητες με παραμέτρους β_k, για τον καταναλωτή με ιδιοκτησία M_k. Το χαρτοφυλάκιό του είναι $x^k = \gamma^k x^1 + (1-\gamma)^k x^2$
Έτσι η συνολική αγορά δίνεται από

το διάνυσμα

$$\left(\sum \gamma^k M_k\right) x^1 + \left(\sum M_k (1-\gamma^k)\right) x^2$$

Το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι λοιπόν

$$x_M = \frac{\sum \gamma^k M_k}{\sum M_k} x^1 + \left(1 - \frac{\sum \gamma^k M_k}{\sum M_k}\right) x^2$$

$$= \gamma^M x^1 + (1-\gamma^M) \cdot x^2$$

όπου $\gamma^M = \sum_k \gamma^k M_k \Big/ \sum_k M_k$.

Άρα και το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι γραμμικός συνδυασμός των x^1, x^2.

Security Market Line

Μπορούμε να αποδείξουμε μία σχέση ανάλογη με την περίπτωση όπου υπάρχει βέβαιο [illegible] στοιχείο. Γράφουμε την (1) ως προς x^M με λ^M, β^M και x_M, $R = \bar{R}_M$, και την πολλαπλασιάζουμε με x'_M οπότε είναι

$$\sigma_M^2 = x_M C x_M = \frac{\lambda^M}{2} - \left(\bar{R}_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) \bar{R}_M \qquad (3)$$

Εδώ $\sigma_M^2 = x'_M C x_M$ είναι η διακύμανση του χαρτοφυλακίου αγοράς. Από τις (1) και (3) έχουμε

$$C x_M = \left(\sigma_M^2 + \left(\bar{R}_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) \bar{R}_M\right) \mathbf{1} - \left(\bar{R}_M + \beta^M/2a\right) \bar{R} \qquad (4)$$

ή κατά συνιστώσες

$$Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = \left(\sigma_M^2 + \left(\bar{R}_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) \bar{R}_M\right) - \left(\bar{R}_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) \bar{R}_i$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ώστε να μοιάζει με την $R_i - r = \beta_i (R_M - r)$ ως εξής:

Έστω χαρτοφυλάκιο [illegible] x_z με $x_z' C x_M = 0$

{Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να "υπολογισθεί" ως εξής: Είναι $x_z = \delta x^1 + (1-\delta) x^2$ για κάποιο δ. Θέλουμε $x_z' C x_M = 0$ δηλαδή

$$(\delta x^1 + (1-\delta)x^2)' C (\gamma x^1 + (1-\gamma) x^2) = 0$$

Από την σχέση αυτή υπολογίζεται εύκολα το δ.}

Πολλ/ζοντας την (4) επί x_z έχουμε

$$0 = \left(\sigma_M^2 + \left(R_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) R_M\right) - \left(R_M + \frac{\beta^M}{2a}\right) \bar{R}_z$$

$(\bar{R}_z = x_z \bar{R})$ ή $\sigma_M^2 = \left(R_M + \frac{\beta^M}{2a}\right)(\bar{R}_z - R_M)$ (5)

Αντικαθιστώντας το $R_M + \beta^M/2a$ με $\sigma_M^2 / (\bar{R}_z - \bar{R}_M)$ στην (4) έχουμε

$$C x_M = \left(\sigma_M^2 + \frac{\sigma_M^2}{\bar{R}_z - R_M} R_M\right) \mathbf{1} - \frac{\sigma_M^2}{\bar{R}_z - \bar{R}_M} \bar{R}$$

ή

$$\frac{Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma_M^2} = 1 + \frac{R_M}{\bar{R}_z - R_M} - \frac{\bar{R}_i}{\bar{R}_z - R_M}$$

ή $\beta_i(R_z - R_M) = R_z - \bar{R}_i$ ή τελικά

$$\bar{R}_i - \bar{R}_z = \beta_i (R_M - \bar{R}_z)$$

Όταν υπάρχει ~~αβέβαιο~~ ακίνδυνο στοιχείο ισχύει $\tilde{R}_z = \tilde{R}_0 = \rho$, το ίδιο ακίνδυνο στοιχείο, εφόσον $cov(\tilde{R}_0, \tilde{R}) = 0$ για κάθε $\tilde{R}$!

Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω αγορά με μόνο δύο περιουσιακά στοιχεία $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ που έχουν $\bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\% \\ 20\% \end{pmatrix}$ και συνδιακυμάνσεις $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, δηλαδή

$Var(\tilde{R}_1) = 2$, $Var(\tilde{R}_2) = 3$ $cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = -1$
(άρα $\rho_{12} = -1/\sqrt{6} = -0,408$)

Είναι $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $C^{-1}\bar{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

και $C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Κανονικοποιημένα, έχουμε

$x^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $x^2 = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$. Άρα όλοι οι συμμετέχοντες των αγορά με τετρ. ωφελιμότητα επενδύουν κατά κάποιο συνδυασμό $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, η δε συνολική αγορά έστω ότι αποτελείται από τον συνδυασμό

$\Pi = \frac{1}{3}x^1 + \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix}$, $\bar{R}^M = \frac{1}{42}(23 \cdot 10 + 19 \cdot 20) = 14,524\%$

Το x_z βρίσκεται ως εξής: $x_z' C \Pi = 0$

ή αν $x_z = \beta x_1 + (1-\beta)x_2$,

$\beta x_1' C \Pi + (1-\beta) x_2' C \Pi =$

$\beta \cdot (1/2 \ \ 1/2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix} + (1-\beta)(\frac{4}{7} \ \ \frac{3}{7})\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix} = 0$

από όπου προκύπτει $\beta = -60$ ή

$x_z = -60x_1 + 61x_2 = \begin{pmatrix} 4,857 \\ -3,857 \end{pmatrix}$ $\bar{R}_z = 4,857 \cdot 10 - 3,857 \cdot 20 = -28,57\%$

Είναι $\sigma_M^2 = \Pi' C \Pi = \frac{1}{42^2}(23 \ \ 19)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix} = 0,7183$

Έπεται $\begin{pmatrix} Cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_M) \\ Cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_M) \end{pmatrix} = C\,n = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 27/42 \\ 34/42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6429 \\ 0,8095 \end{pmatrix}$

Άρα είναι $\beta_1 = \frac{cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0,6429}{0,7183} = 0,8950$

$\beta_2 = \frac{cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0,8095}{0,7183} = 1,1270$

Οι σχέσεις $\bar{R}_j - \bar{R}_z = \beta_j(\bar{R}_M - \bar{R}_z)$ γίνονται

$10\% - (-28,57\%) \stackrel{?}{=} 0,8950\,(14,524 - (-28,57))\%$

και

$20\% - (-28,57\%) \stackrel{?}{=} 1,1270\,(14,524 - (-28,57))\%$

που όπως επαληθεύονται αριθμητικά.

//