Το υπόδειγμα CAPM - Capital Asset Pricing Model

Είδαμε ότι όσοι έχουν τετραγωνική ωφελιμότητα επενδύουν στο ίδιο χαρτοφυλάκιο αβεβαίων. Αυτό σημαίνει ότι αν ο επενδυτής ℓ ($\ell = 1, 2, \ldots, L$) κατανέμει τις επενδύσεις του στα περιουσιακά στοιχεία i κατά μερίδια x_i^ℓ, θα ισχύει ότι ο λόγος $\frac{x_i^\ell}{\sum_{j=1}^{n} x_j^\ell}$ είναι ανεξάρτητος του ποιος είναι ο επενδυτής, δηλαδή του ℓ, και ισούται με π_i για κάθε ℓ.

Εφόσον $\sum_{j=0}^{n} x_j^\ell = 1$ είναι $\sum_{j=1}^{n} x_j^\ell = 1 - x_0^\ell$

και επομένως $x_i^\ell = (1 - x_0^\ell)\pi_i \qquad i \geq 1$

Έστω ότι <u>όλοι</u> οι επενδυτές έχουν τετραγωνική ωφελιμότητα με διαφορετικές παραμέτρους. Δηλαδή η ωφελιμότητα του επενδυτή ℓ είναι $U_\ell(x) = a_\ell x^2 + b_\ell x + \gamma_\ell$. Τότε

σύμφωνα με τα προηγούμενα ο λόγος π_i <u>δεν</u> εξαρτάται από τα a_ℓ, b_ℓ όμως το x_0^ℓ εξαρτάται και από τα a_ℓ, b_ℓ. Συγκεκριμένα περιμένουμε ότι οι πιο συντηρητικοί επενδυτές (για μεγάλα $|a|$) έχουν υψηλότερες τιμές του x_0. Επίσης το x_i^ℓ εξαρτάται από τα a_ℓ, b_ℓ αλλά μόνο μέσω του x_0^ℓ.

Τα συνολικά κεφάλαια επενδεδυμένα στα αβέβαια χρηματιστηριακά στοιχεία (η "κεφαλαιοποίηση της αγοράς") M είναι

$$M = \sum_{\ell=1}^{L} (1-x_0^\ell) K^\ell$$

Τα επενδεδυμένα στον τίτλο $i \geq 1$ (δηλαδή η κεφαλαιοποίηση του στοιχείου i) είναι

$$\begin{aligned} M_i &= \sum_{\ell=1}^{L} x_i^\ell K^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{L} \pi_i (1-x_0^\ell) K^\ell \\ &= \pi_i \sum_{\ell=1}^{L} (1-x_0^\ell) K^\ell \\ &= \pi_i M \quad \text{ή} \quad \pi_i = M_i / M \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να ελεγχθεί και εμπειρικά, αν και ο άμεσος έλεγχός της είναι δυσχερής λόγω του μεγάλου πλήθους των χρ. στοιχείων.

Η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου που επενδύει μόνο στα αβέβαια ($x_0 = 0$) είναι $\sum_{i=1}^{N} \pi_i \bar{R}_i = \sum_{i=1}^{N} \bar{R}_i M_i / M$

που είναι η αναμενόμενη απόδοση όλης της αγοράς, οπότε γράφουμε

$$\bar{R}_M = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \bar{R}_i$$

και ο δείκτης M προκύπτει από το "Market"

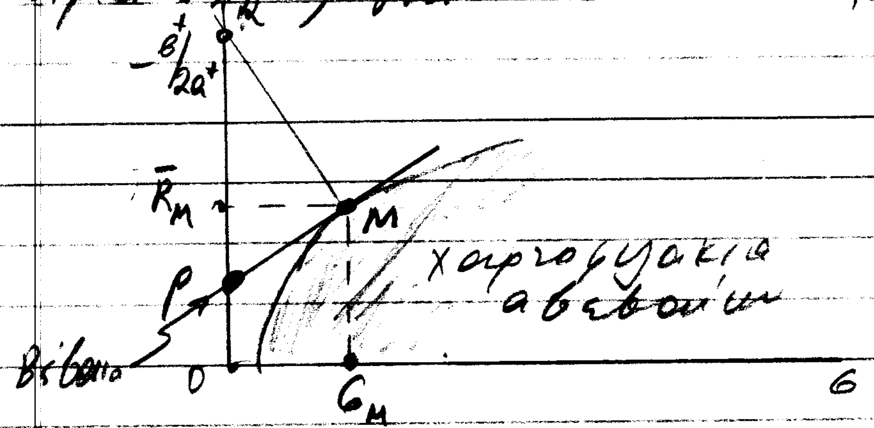
Προφανώς, εφόσον $M_i / M \geq 0$, για να ισχύουν τα παραπάνω θα πρέπει η επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου το μην οδηγεί σε αρνητικά π_i.

Οι σχέσεις του βέλτιστου χαρτοφυλακίου μπορούν να γραφούν με ένα άλλο εμπειρικά ελέγξιμο τρόπο. Από τις σημειώσεις έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\bar{R}_i}{\rho} - 1\right) \quad i=1,\dots,n \qquad (1)$$

με $c_{ij} = cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$

Εξετάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο για το οποίο $x_0 = 0$ (για κάποια a^*, b^* ο επενδυτής έχει $x_0 = 0$, βλέπε το σχήμα:) για το οποίο ισχύει κάποιο $\lambda = \lambda^*$.



Άρα θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \pi_j = \frac{\lambda^*}{2}\left(\frac{\bar{R}_i}{\rho} - 1\right) \qquad (2)$$

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού (με $x_0 = 0$) είναι $\tilde{R}_M = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \tilde{R}_i$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό ονομάζεται "χαρτοφυλάκιο αγοράς". Τότε η συνδιακύμανσή του με το i περιουσιακό είναι $cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_i) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j c_{ij} \quad \text{και}$$

άρα η (2) γράφεται και ως

$$cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} n_j = \frac{\lambda^*}{2}\left(\frac{\bar{R}_i}{\rho} - 1\right) \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (3) επί n_i και προσθέτουμε οπότε προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} n_i \, cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i) = \frac{\lambda^*}{2}\left(\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i n_i - \sum n_i\right)$$

$$\sigma_M^2 = cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_M) = \frac{\lambda^*}{2}\left(\bar{R}_M/\rho - 1\right) \quad (4)$$

Υπολογίζοντας το λ^* από το (4) και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε

$$cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i) = \sigma_M^2 \frac{(\bar{R}_i/\rho - 1)}{(\bar{R}_M/\rho - 1)} = \sigma_M^2 \frac{\bar{R}_i - \rho}{\bar{R}_M - \rho}$$

που γράφεται τελικά ως

$$\bar{R}_i = \rho + \frac{cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i)}{\sigma_M^2}(\bar{R}_M - \rho)$$

Ο συντελεστής $\frac{cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i)}{\sigma_M^2}$ ονομάζεται (beta coefficient) β_i και αντανακλά την επικινδυνότητα του τίτλου. Έτσι π.χ. αν ένας τίτλος έχει $\beta = 3/4$, η απόδοση της αγοράς είναι 6% και ο βέβαιος τίτλος έχει απόδοση 2%, η απόδοση του τίτλου είναι $\bar{R}_i = 2 + 3/4\,(6-2) = 5\%$, που ισχύει βέβαια αν η "αγορά" είναι σε ισορροπία

Σαν άσκηση υπολογίστε τα β από παράδειγμα του εδαφίου 4.3 των σημειώσεων.

Τα παραπάνω είναι δύσκολα επιβεβαιώσιμα με οικονομετρικές μεθόδους για διάφορους λόγους, ένας εκ των οποίων είναι ότι ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων είναι πολύ μεγάλος. Επίσης παραδοχές όπως της τετραγωνικής ωφελιμότητας, του δανεισμού με ίδιο επιτόκιο με τις τοποθετήσεις και άλλες, οδηγούν σε αμφισβήτηση των παραπάνω αποτελεσμάτων. Υπάρχει μεγάλη βιβλιογραφία σε επεκτάσεις των παραπάνω σχέσεων. Βλέπε το άρθρο των Κωνσταντινίδη - Μάλλιαρη στον ιστότοπο του μαθήματος. Η θεωρία αυτή, πάντως αποτελεί βάση για την σύγχρονη ανάλυση των αγορών κεφαλαίων.