Επιχειρησιακή Έρευνα
Πρόοδος
Μάιος 2014

Γράψτε όσο το δυνατόν περισσότερα θέματα. Κάθε θέμα έχει ίδια αξία. Διάρκεια 1 ώρα 30 λεπτά.

Θέμα 1

α. Επιβεβαιώσε ότι οι τιμές των μεταβλητών $x=10/30$, $y=34/30$ και $z=8/30$ αποτελούν ακρότατο στο πρόβλημα με αντικειμενική συνάρτηση $x^2+y^2+z^2$ και περιορισμούς $x+y+2z=2$ και $x-y+3z=0$ δείχνοντας ότι οι τιμές των μεταβλητών αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες Lagrange.
β. Αν οι περιορισμοί μεταβληθούν σε $x+y+2z=1{,}9$ και $x-y+3z=0{,}1$ υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή της f στο νέο βέλτιστο.

Θέμα 2α

Ένα πλοίο εμπορευματοκιβωτίων μπορεί να φορτώσει Κ είδη εμπορευματοκιβωτίων. Από κάθε είδος μπορεί να φορτώσει απεριόριστο αριθμό εμπορευματοκιβωτίων. Το είδος i φέρνει έσοδο a_i έχει βάρος b_i και όγκο 300 κυβικά μέτρα. Το πλοίο μπορεί να μεταφέρει συνολικό βάρος Β και συνολικό όγκο Μ. Διατυπώστε το πρόβλημα συμβολικά και δείξτε πώς θα το εισάγατε σε ένα λογισμικό βελτιστοποίησης τύπου Solver. Ενδεικτικά θεωρείστε ότι υπάρχουν 10 είδη εμπορευματοκιβωτίων.

Θέμα 2β

Για ένα συγκεκριμένο πλοίο ο περιορισμός όγκου περιττεύει καθώς τα υποψήφια φορτία είναι όλα μεγάλου ειδικού βάρους. Έστω ότι υπάρχουν 4 είδη εμπορευματοκιβωτίων με χαρακτηριστικά που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τύπος κιβωτίου	Α	Β	Γ	Δ
Έσοδο	10	8	4	11
Βάρος	5	4	3	6

Έστω ότι το πλοίο μπορεί να φορτώσει έως 11 μονάδες βάρους και θέλουμε να δούμε πόσα κιβώτια πρέπει να φορτώσει από κάθε τύπο για να μεγιστοποιήσει τα έσοδα. Γράψτε την σχετική εξίσωση Δυναμικού προγραμματισμού, λύστε την, και γράψτε την βέλτιστη φόρτωση.

Θέμα 3

Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μόνο εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Η ανά εβδομάδα διαθέσιμη εργασία είναι 2000 εργατοώρες, η δε αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

	Κέρδος/τεμάχιο	*Εργατοώρες ανά τεμάχιο*	*Όγκος τεμαχίου σε κυβικά*
Α	*4*	*2*	*3*
Β	*3*	*6*	*2*
Γ	5	8	4

(α) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης την εβδομάδα (β) Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να νοικιάσουμε επιπλέον κυβικά αποθήκης με κόστος 1 € ανά κυβικό την εβδομάδα (γ) Αν για κάθε προϊόν υπάρχει ένα πάγιο κόστος «εκκίνησης» της παραγωγής του πχ. 5000 μονάδων (ανεξαρτήτως του επιπέδου παραγωγής), πώς θα διαμορφώνατε το πρόβλημα;

Θέμα 4

α. Έστω η εξίσωση διαφορών $x_n=x_{n-1}+6x_{n-2}$ με συνοριακές συνθήκες $x_1=x_2=1$. Υπολογίστε το x_{1000} με κάποιο «τύπο» που να περιλαμβάνει δυνάμεις κλπ.
β. Ίδια ερώτηση για την εξίσωση διαφορών $x_n=x_{n-1}+6x_{n-2}+3$

Θέμα 5

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2+10y^2$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε. Υπολογίστε το ελάχιστο αναλυτικά. Κατόπιν με αρχικό σημείο το (1,1) εκτελέστε <u>δύο</u> βήματα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας. και εκτιμείστε πόσο πλησίασε η μέθοδος στο βέλτιστο. Ει δυνατόν δείξτε διαγραμματικά την πορεία της αναζήτησής σας.

Πρόχειρες Λύσεις

1. $\mathcal{L} = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+2z-2)+\lambda_2(x-y+3z)$

(α) Οι δεδομένες τιμές ικανοποιούν τους περιορισμούς...

$\partial \mathcal{L}/\partial x = 2x+\lambda_1+\lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1+\lambda_2 = -2\cdot 10/30$

$\partial \mathcal{L}/\partial y = 2y+\lambda_1-\lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1-\lambda_2 = -2\cdot 34/30$

$\partial \mathcal{L}/\partial z = 2z+2\lambda_1+3\lambda_2 = 0 \rightarrow 2\lambda_1+3\lambda_2 = -2\cdot 8/30$

Από τις δύο πρώτες σχέσεις προκύπτει

$\lambda_1 = -\frac{10+34}{30} = -\frac{44}{30} \quad \lambda_2 = -\frac{20}{30}+\frac{44}{30} = \frac{24}{30}$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη, ελέγχουμε ότι ικανοποιείται!

(Εναλλακτικά $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -20/30 \\ 1 & -1 & -68/30 \\ 2 & 3 & -16/30 \end{vmatrix} = 0$!)

(β) $x+y+2z = 1,9 \rightarrow x+y+2z-2 = -0,1$

$x-y+3z = 0,1$

Άρα $\Delta f = \frac{\partial F}{\partial g_1}\Delta g_1 + \frac{\partial F}{\partial g_2}\Delta g_2 = -\lambda_1 \Delta g_1 - \lambda_2 \Delta g_2$

$= \frac{44}{30}(-0,1) - \frac{24}{30}\,0,1 = \frac{-4,4-2,4}{30} = -\frac{6,8}{30}$

Άρα η νέα τιμή είναι $\left(\frac{10}{30}\right)^2+\left(\frac{34}{30}\right)^2+\left(\frac{8}{30}\right)^2-\frac{6,8}{30}$

2 a. $\max \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$

$\sum_{i=1}^{k} b_i x_i \le B \qquad 0 \le x_i$ ακέραιοι

$\sum_{i=1}^{k} 300 x_i \le M$

	A	B	C	D
1	a_1	b_1	x_1	D1 := SUMPRODUCT(A1:A10; C1:C10)
⋮	⋮	⋮	⋮	D2 := SUMPRODUCT(B1:B10; C1:C10)
			⋮	D3 := 800 * SUM(C1:C10)
10	a_{10}	b_{10}	x_{10}	D4 : ← B D5 ← M

$\Sigma a_i x_i$, $\Sigma b_i x_i$

<u>Solver</u> Max D1

περιορισμοί
- D2 ≤ D4. D3 ≤ D5
- C1:C10: INTEGER

2γ $$V(B) = \max_{\substack{j=1,..,k \\ b_j \le B}} \{a_j + V(B-b_j)\}$$

$V(1)=V(2)=0,\ V(3)=4,\ V(4)=8$ (προφανώς)

$$V(5) = \max\{\underset{A}{10+V(0)};\ \underset{B}{8+V(1)};\ \underset{C}{4+V(2)}\} = 10$$

$$V(6) = \max\{10+V(1);\ 8+V(2);\ 4+\overset{4}{V(3)};\ 11+V(0)\} = 11$$

$$V(7) = \max\{10+V(2);\ 8+\overset{4}{V(3)};\ 4+\overset{8}{V(4)};\ 11+V(1)\} = 12$$

$$V(8) = \max\{10+\overset{4}{V(3)};\ 8+\overset{8}{V(4)};\ 4+\overset{10}{V(5)};\ 11+V(2)\} = 16$$

$$V(9) = \max\{10+\overset{8}{V(4)};\ 8+V(5);\ 4+\overset{11}{V(6)};\ 11+\overset{4}{V(3)}\} = 18$$

$$V(10) = \max\{10+V(5);\ \overset{11}{\cdot};\ \overset{12}{\cdot};\ 16;\ 10\} = 20$$

$$V(11) = \max\{\underset{\uparrow}{10+V(6)};\ 8+V(7);\ 4+V(8);\ \underset{\uparrow}{11+V(5)}\} = 21$$

Η βέλτιστη φόρτωση είναι ένα αντ. τύπου A και ένα τύπου Δ (όπου επιτυγχάνονται τα βέλτιστα...)

3. (α) $$\max\ 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma$$
$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1000$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0$$

(β) Έστω y_{An} η επιπλέον χωρητ. αποθήκη Θέσης

$$\max\ 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - 1\cdot y_{An}$$
$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1000 + y_{An}$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma, y_{An} \ge 0.$$

(γ) $z_A, z_B, z_\Gamma \in \{0,1\}$ Ερμηνεία: 1 αν υπάρχει παραγωγή

$\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - 2\cdot y_{\Delta\Pi} - 5000(z_A + z_B + z_B)$

Εισάγουμε τους περιορισμούς του (6):

- $Mz_A \ge x_A \quad Mz_B \ge x_B \quad Mz_\Gamma \ge x_\Gamma$
- $z_A, z_B, z_A \in \{0, 1\}$

4. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$s^n = s^{n-1} + 6s^{n-2} \longrightarrow$$
$$s^2 = s + 6 \rightarrow s^2 - s - 6 = (s-3)(s+2)$$

Άρα η ομογενής έχει λύση $A\,3^n + B(-2)^n$

όπου
$$\left.\begin{aligned} A\,3^1 + B(-2)^1 &= 1 \\ A\,3^2 + B(-2)^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = 1/5 \quad B = -1/5 \rightarrow x_n = \frac{1}{5}3^n - \frac{4}{5}(-2)^n$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς: Δοκιμάζουμε σταθερή, δηλαδή $x_n = k \ \forall n$. Πρέπει $k = k + 6k + 3$ ή $k = -1/2$. Άρα η γενική λύση είναι

$x_n = A\,3^n + B(-2)^n - 1/2$. Τα A, B βρίσκονται λύνοντας

$$\left\{\begin{aligned} A\,3^1 + B(-2)^1 - 1/2 &= 1 \rightarrow 3A - 2B = 3/2 \\ A\cdot 3^2 + B(-2)^2 - 1/2 &= 1 \rightarrow 9A + 4B = 3/2 \end{aligned}\right.$$
$$\rightarrow A = 3/10 \quad B = -3/10$$

5. $\nabla f = (2x, 20y) \propto (x, 10y)$

Στο $(1,1)$ το ∇f είναι ανάλογο του $(1,10)$

Δοκιμάζουμε λύσεις $(1,1) + t(1,10)$

$= (1+t \,;\, 1+10t) \rightarrow \min\ x^2 + 10y^2$

$\longrightarrow \min\ (1+t)^2 + 10(1+10t)^2$

Η παράγωγος είναι $2(1+t) + 2\cdot 100(1+10t)$

$= 2(1 + t + 100 + 1000t) = 0 \rightarrow t = -\frac{101}{1001} \approx -\frac{1}{10}$

Το ελάχιστο σημείο είναι

$$\left(1 - \frac{101}{1001}, 1 + 10\left(-\frac{101}{1001}\right)\right) = \left(\frac{900}{1001}, \frac{1001-1010}{1001}\right)$$

$$= \left(\frac{900}{1001}, \frac{-9}{1001}\right) = \frac{9}{1001}(100, -1) =$$

Το ∇f στο νέο σημείο είναι ανάλογο του $(100, -10) \approx (10, -1)$ και είναι κάθετο στο προηγούμενο. Η αναζήτηση γίνεται κατά την διεύθυνση $(10, -1)$ και άρα κοιτάμε $(0{,}9 + 10t, -0{,}001 - t)$

$$\to \min\ (0{,}9+10t)^2 + 10(0{,}001+t)^2$$

$$\to \cancel{20}(0{,}9+10t) + \cancel{20}(0{,}001+t) = 0$$

$$0{,}9 + 10t + 0{,}001 + t = 0$$

$$t \cong -0{,}9/11.$$

Το επόμενο σημείο είναι $\left(0{,}9 - 9/11, -0{,}001 + \frac{0{,}9}{11}\right)$

$$= \left(\frac{9{,}9-9}{11}, \frac{-0{,}011+0{,}9}{11}\right) \cong \left(\frac{0{,}9}{11}, \frac{0{,}9}{11}\right)$$ που

έχει προσεγγίσει αρκετά το βέλτιστο $(0,0)$