Επιχειρησιακή Έρευνα
Πρόοδος
Μάιος 2013

Γράψτε όσο το δυνατόν περισσότερα θέματα. Κάθε θέμα έχει ίδια αξία. Διάρκεια 1 ώρα 30 λεπτά.

Θέμα 1

Επιβεβαιώσε ότι οι τιμές των μεταβλητών x=10/30, y=34/30 και z=8/30 αποτελούν ακρότατο στο πρόβλημα min $x^2+y^2+z^2$ με περιορισμούς x+y+2z=2 και x-y+3z=0.

Θέμα 2

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

Min $x+3y$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$x^2 + 2y^2 \leq 8$

$y \geq 1$

Θέμα 3

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = 5x^2+2y^2+2xy-12x-6y+15$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε. Υπολογίστε το ελάχιστο αναλυτικά. Κατόπιν με αρχικό σημείο το (0,0) εκτελέστε δύο βήματα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας. και εκτιμείστε πόσο πλησίασε η μέθοδος στο βέλτιστο. Ει δυνατόν δείξτε διαγραμματικά την πορεία της αναζήτησής σας.

Θέμα 4

Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μόνο εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Η ανά εβδομάδα διαθέσιμη εργασία είναι 2000 εργατοώρες, η δε αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

	Κέρδος/τεμάχιο	Εργατοώρες ανά τεμάχιο	Όγκος τεμαχίου σε κυβικά
Α	4	2	3
Β	3	6	2
Γ	5	8	4

(α) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης την εβδομάδα (β) Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να νοικιάσουμε επιπλέον κυβικά αποθήκης με κόστος 1 € ανά κυβικό την εβδομάδα (γ) Αν για κάθε προϊόν υπάρχει ένα πάγιο κόστος «εκκίνησης» της παραγωγής του πχ. 5000 μονάδων (ανεξαρτήτως του επιπέδου παραγωγής), πώς θα διαμορφώνατε το πρόβλημα;

Θέμα 5

α. Ένα πλοίο εμπορευματοκιβωτίων μπορεί να φορτώσει Κ είδη εμπορευματοκιβωτίων. Από κάθε είδος μπορεί να φορτώσει απεριόριστο αριθμό εμπορευματοκιβωτίων. Το είδος i φέρνει έσοδο a_i έχει βάρος b_i και όγκο 300 κυβικά μέτρα. Το πλοίο μπορεί να μεταφέρει συνολικό βάρος Β και συνολικό όγκο Μ. Διατυπώστε το πρόβλημα συμβολικά και δείξτε πώς θα το εισάγατε σε ένα λογισμικό βελτιστοποίησης τύπου Solver. Ενδεικτικά θεωρείστε ότι υπάρχουν 10 είδη εμπορευματοκιβωτίων.

β. Ένα πλοίο έχει αιτήσεις μεταφοράς για ένα συγκεκριμένο ταξείδι από Κ φορτία με δείκτη j=1,..,K. Κάθε φορτίο μπορεί είτε να αναληφθεί είτε όχι. Το j φορτίο έχει όγκο c_j και βάρος β_j, έχει δε ναύλο a_j. Το πλοίο μπορεί να μεταφέρει συνολικό βάρος έως Β και συνολικό όγκο έως Μ. Διατυπώστε το πρόβλημα συμβολικά και δείξτε πώς θα εισάγατε το πρόβλημα σε ένα λογισμικό βελτιστοποίσης.

(Πρόχειρες) Λύσεις ①

1. $\mathcal{L} = -x^2 - y^2 - z^2 + \lambda(x+y+2z) + \mu(x-y+3z)$

• Τα δεδομένα x, y, z ικανοποιούν τους περιορισμούς. Επιπλέον θα πρέπει

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x + \lambda + \mu = 0 \rightarrow \lambda + \mu = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y + \lambda - \mu = 0 \rightarrow \lambda - \mu = 34/15$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -2z + 2\lambda + 3\mu = 0 \rightarrow 2\lambda + 3\mu = \frac{8}{15}$$

Από τις δύο πρώτες είναι $\lambda = 22/15$, $\mu = -\frac{12}{15}$ οι οποίες και ικανοποιούν και την τρίτη σχέση! (Χωρίς την τελευταία παρατήρηση δεν έχει ολοκληρωθεί η λύση)

2. $\mathcal{L} = -x - 3y + \lambda(8 - x^2 - 2y^2) + \mu(y-1)$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = -1 - 2\lambda x = 0$ (1)

$\partial \mathcal{L}/\partial y = -3 - 4\lambda y + \mu = 0$ (2)

Από την (1) αφού $\lambda \geq 0$ και $x^2 + 2y^2 = 8$
Από την (2) ισχύει ότι $\mu = 3 + 4\lambda y > 0$
(εφόσον $y \geq 1$) και άρα $y = 1$. Άρα
$x^2 = 6$ και εφόσον $x = -1/2\lambda < 0$ θα
είναι $x = -\sqrt{6}$.

3. $\partial f/\partial x = 10x + 2y - 12 = 0$

$\partial f/\partial y = 2x + 4y - 6 = 0$

και άρα $x = y = 1$

$$\nabla f = \left(\partial f/\partial x , \partial f/\partial y \right) = \left(10x + 2y - 12, \ 2x + 4y - 6\right)$$

$$\nabla f(0,0) = (-12, -6) = k(2,1)$$

Άρα ψάχνουμε ελαχιστοποίηση στα σημεία $(2t, t)$ όπου $f(2t,t)$

$$= 20t^2 + 2t^2 + 4t^2 - 24t - 6t + 15$$
$$= 26t^2 - 30t + 15$$

$$\longrightarrow t_{min} = 30/52 \longrightarrow (x_1, y_1) = \left(\frac{60}{52}, \frac{30}{52}\right)$$

Στο νέο σημείο $\nabla f(x_1, y_1) = \left(10\frac{60}{52} + 2\frac{30}{52} - 12, \ \frac{120}{52} + \frac{120}{52} - 6\right)$

$$= \left(\frac{36}{52}, -\frac{72}{52}\right) = k(1, -2)$$

Άρα αναζητούμε στα σημεία

$\left(\frac{60}{52} + t, \frac{30}{52} - 2t\right)$ λύνοντας το πρόβλημα

$$\min_t \ 5\left(\frac{60}{52}+t\right)^2 + 2\left(\frac{30}{52}-2t\right)^2 + 2\left(\frac{60}{52}+t\right)\left(\frac{30}{52}-2t\right)$$
$$-12\left(\frac{60}{52}+t\right) - 6\left(\frac{30}{52}-2t\right) + 15$$

Το βέλτιστο t βρίσκεται λύνοντας την εξ.

$$10\left(\frac{60}{52}+t\right) - 8\left(\frac{30}{52}-2t\right) + 2\left(\frac{30}{52}-2t\right)$$
$$-4\left(\frac{60}{52}+t\right) - 12 + 12 = 0$$

από όπου προκύπτει $t = -0{,}1923$ και $x_2 = y_2 = 0{,}9615$ που είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο $x = y = 1$.

4. (α) x_A, x_B, x_Γ : ποσότητες προϊόντων

$$\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma$$
$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1000$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0$$

(β) y : [illegible] "[illegible]"

$$\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - y$$
$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1000 + y$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma, y \ge 0$$

(γ) $y_A, y_B, y_\Gamma \in \{0, 1\}$

ΠΡΟΣΟΧΗ : $0 \le x_A \le M y_A \quad 0 \le x_B \le M y_B \quad 0 \le x_\Gamma \le M y_\Gamma$

M: "μεγάλος" αριθμός

$$\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - y - 5000(y_A + y_B + y_\Gamma)$$

σε τους προηγούμενους περιορισμούς.

5. (a) $\max_{x_i} \sum a_i x_i$

$$\sum b_i x_i \le B$$
$$\sum x_i \le M/300$$

x_i ακέραιοι, ≥ 0

(β) $\max \sum_i a_i x_i$

$\sum b_i x_i \le B \quad \sum_i c_i x_i \le M \quad x_i \in \{0,1\}$!!

Υλοποίηση σε solver:

(α) Έστω k = 10

	A	B	C	D	F	
1	.	a_1	.	300		← θέση B
2	-	a_2	.	300		← θέση M
3	.	.	.	300		
4	.	.	-			
...						
10	.	a_{10}	.	300		

όγκος θέσεις b

θέσεις a

θέσεις μεταβλητών

	A	B
12	Βάρος	← B12: =SUMPRODUCT(A1:A10;C1:C10)
13	Όγκος	← B13: =SUMPRODUCT(A1:A10;D1:D10)
14	Όφελος	← B14: =SUMPRODUCT(A1:A10;B1:B10)

Solver

Maximize B14

By Changing $\boxed{A1:A10}$

Περιορισμοί

B12 ≤ F1

B13 ≤ F2

ΚΑΙ $\boxed{A1:A10 \mid INTEGER}$ και $\boxed{A1:A10 \geq 0}$

↑ περιορισμοί στο SOLVER

Το (β) είναι το ίδιο αλλά με περιορισμό

$\boxed{A1:A10 \mid BINARY}$

↑ και όχι INTEGER