Επιχειρησιακή Έρευνα
Πρόοδος
Μάιος 2011

Γράψτε όσο το δυνατόν περισσότερα θέματα. Κάθε θέμα έχει ίδια αξία. Διάρκεια 1 ώρα 30 λεπτά.

Θέμα 1

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2+2y^2-xy$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε με αριθμητικές μεθόδους.

(α) Βρέστε αναλυτικά το ελάχιστο

(β) Με αρχικό σημείο το (1,1) εκτελέστε ένα βήμα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας

(γ) Διατυπώστε το πρόβλημα μονοδιάστατης ελαχιστοποίησης θα πρέπει να λυθεί στο επόμενο βήμα της αναζήτησης.

Προαιρετικά: Παρουσιάστε διαγραμματικά την πορεία της μεθόδου, εκτελέστε διαγραμματικά το επόμενο βήμα και σχολιάστε πόσο πλησίασε η μέθοδος στο ελάχιστο.

Θέμα 2

Θέλουμε να κάνουμε μία δίαιτα το πολύ 1800 θερμίδων ημερησίως. Έχουμε διαθέσιμες 4 τροφές Α,Β,Γ,Δ με θερμιδική περιεκτικότητα ανά γραμμάριο τροφής που δίνεται στον παρακάτω πίνακα. Ο ίδιος πίνακας δίνει την περιεκτικότητα των τροφών αυτών σε υδατάνθρακες και πρωτεΐνες. Η «απόλαυση» από την κατανάλωση μιας μονάδας της κάθε τροφής δίνεται επίσης στον πίνακα

(α) Αν μία δίαιτα απαιτεί τουλάχιστον 200 γραμμάρια λιπών και 300 πρωτεϊνών ημερησίως, διατυπώστε το πρόβλημα της κατάστρωσης της τυπικής ημερήσιας δίαιτας.

(β) Μία εναλλακτική διατύπωση είναι ότι το πολύ 60% της περιεκτικότητας των τροφών να είναι πρωτεΐνες, ΔΕΝ υπάρχει ποσοτικός περιορισμός στις πρωτεΐνες και τους υδατάνθρακες, αλλά απαιτούνται τουλάχιστον 1500 θερμίδες. Πώς θα διατυπώνατε το πρόβλημα της κατάστρωσης της ημερήσιας δίαιτας; Θεωρούμε ότι οι τροφές αποτελούνται αποκλειστικά από πρωτεΐνες και λίπη.

(γ) Έστω ότι θέλατε να κάνετε ένα πρόγραμμα δίαιτας για δύο ημέρες, και θέλουμε να εξασφαλίσουμε κάποια ποικιλία στην διατροφή μας. Έτσι η ποσότητα οποιαδήποτε τροφής Α,Β,Γ,Δ πρέπει να διαφέρει κατά τουλάχιστον 10% από την κατανάλωση της προηγούμενης ημέρας. Διατυπώστε το νέο πρόβλημα με τους περιορισμούς στο (α)

Συντελεστές ανά 10 γραμμάρια τροφής

Τροφές	Α	Β	Γ	Δ
Θερμίδες	70	80	40	60
Πρωτεΐνες	12	10	35	20
Λίπη	50	65	5	35
Δείκτης απόλαυσης	2	5	0	1

Θέμα 3

Έστω το πρόβλημα με αντικειμενική συνάρτηση

$$f(x,y) = 5x + y$$

και με περιορισμούς

$$9 \geq x^2 + 2y^2$$

$$y \geq -x$$

Θέλουμε να λύσουμε τα προβλήματα εύρεσης ακρότατου της αντικειμενικής συνάρτησης με τους παραπάνω περιορισμούς. (α) Εξετάστε αν στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης η λύση είναι $(x,y) = (-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (β) Λύστε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της αντικειμενικής με τους ίδιους περιορισμούς.

Θέμα 4

Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\max \sum_{i=1}^{1000} a_i\, x_i$$

Με περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{1000} b_i\, x_i \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{1000} c_i\, x_i \leq c$$

$$x_i \geq 0 \; \gamma\iota\alpha \; i = 1, \ldots, 1000$$

Οι παράμετροι του προβλήματος a_i, b_i, c_i έχουν εγγραφεί σε ένα φύλλο λογισμικού στις θέσεις A1:A1000, B1:B1000, C1:C1000, ενώ τα b,c στις θέσεις D1,D2 αντίστοιχα

α. Διατυπώστε το πρόβλημα σε Solver κάνοντας «λίγες» πληκτρολογήσεις. Συγκεκριμένα συμπληρώστε το φύλλο λογισμικού και περιγράψτε τα δεδομένα που θα δώσετε στο Solver.

β. Στο ίδιο πρόβλημα επιτρέπεται το πολύ σε 5 από τα x_i να είναι θετικά (τα υπόλοιπα πρέπει να είναι μηδενικά). Διαμορφώστε το νέο πρόβλημα και περιγράψτε την λύση του σε Solver.

Θέμα 5

Θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^2-x$. Αν γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο είναι στο διάστημα [0,2] εντοπίστε το με ακρίβεια 2 δεκαδικών. Χρησιμοποιείστε οποιαδήποτε μέθοδο θέλετε.

Θέμα 1

(α) $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2x-y,\ 4y-x)$. Στο ακρότατο $\nabla f = (0,0) \Rightarrow 2x-y = 4y-x = 0 \Rightarrow x=y=0$, όπου ικανοποιούνται και οι συνθήκες β' τάξης

(β) $(x_0,y_0) = (1,1)$. Αναζητούμε κατά

$$(x_0,y_0) + t\nabla f(1,1) = (1,1) + t(2\cdot 1-1,\ 4\cdot 1-1)$$
$$= (1,1) + t(1,3) = (1+t,\ 1+3t).$$

Θέτουμε $\frac{d}{dt}f(1+t, 1+3t) = 0$, αλλά $df/dt = (2x-y)\frac{dx}{dt} + (4y-x)\frac{dy}{dt}$

$$= (2x-y) + 3(4y-x) = 0$$ Άρα

$$2x - 3x - y + 12y = 0 \Rightarrow x = 11y \Rightarrow 1+t = 11(1+3t)$$
$$\Rightarrow t^* = -10/32 = -5/16$$

Έτσι το επόμενο σημείο είναι $(x_1,y_1) = \left(1-\frac{5}{16}, 1-\frac{15}{16}\right)$

$$= \left(\frac{11}{16}, \frac{1}{16}\right) \text{ με } \nabla f(x_1,y_1) = \left(2\cdot\frac{11}{16} - \frac{1}{16},\ \frac{4}{16} - \frac{11}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{16}(21, -7) = \frac{7}{16}(3,-1)$$

(Παρατηρούμε $\nabla f(x_0,y_0)\cdot\nabla f(x_1,y_1) = 0$)

(γ) Το (x_2,y_2) βρίσκεται λύνοντας το πρόβλημα

$$\min_t f\left(\frac{11}{16} + 3t,\ \frac{1}{16} - t\right)$$

Θέμα 2

(α) $x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta$: Ποσότητες από τροφές

$\max\ 2x_A + 5x_B + x_\Delta$

$70x_A + 80x_B + 40x_\Gamma + 60x_\Delta \le 1800$ θερμίδες

$50x_A + 65x_B + 5x_\Gamma + 35x_\Delta \ge 200$ (λίπη)

$12x_A + 10x_B + 35x_\Gamma + 20x_\Delta \ge 300$ (πρωτεΐνες)

$x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta \ge 0$

(β) $\max \; 2x_A + 5x_B + x_\Delta$

$70x_A + 80x_B + 40x_\Gamma + 60x_\Delta \geq 1500$ (θερμ.)

$x_\Pi = 12x_A + 10x_B + 35x_\Gamma + 20x_\Delta$ (αριθμός πρωτεϊνών)

$x_\Lambda = 50x_A + 65x_B + 5x_\Gamma + 35x_\Delta$ (αριθμός λιπών)

$x_\Pi \leq 0.6\,(x_\Pi + x_\Lambda)$ (Πρωτεΐνες το πολύ 60% από όλο)

$x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta \geq 0$

(γ) $x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2, \ldots$ Τροφές 1ης και 2ης μέρας

$\max \; 2(x_A^1 + x_A^2) + 5(x_B^1 + x_B^2) + (x_\Delta^1 + x_\Delta^2)$

- $70x_A^i + 80x_B^i + 40x_\Gamma^i + 60x_\Delta^i \leq 1800$ για $i=1,2$

(το ίδιο και για λίπη, πρωτεΐνες)

- $|x_A^1 - x_A^2| \geq 10\% \cdot x_A^1$ το ίδιο για Β, Γ, Δ ...

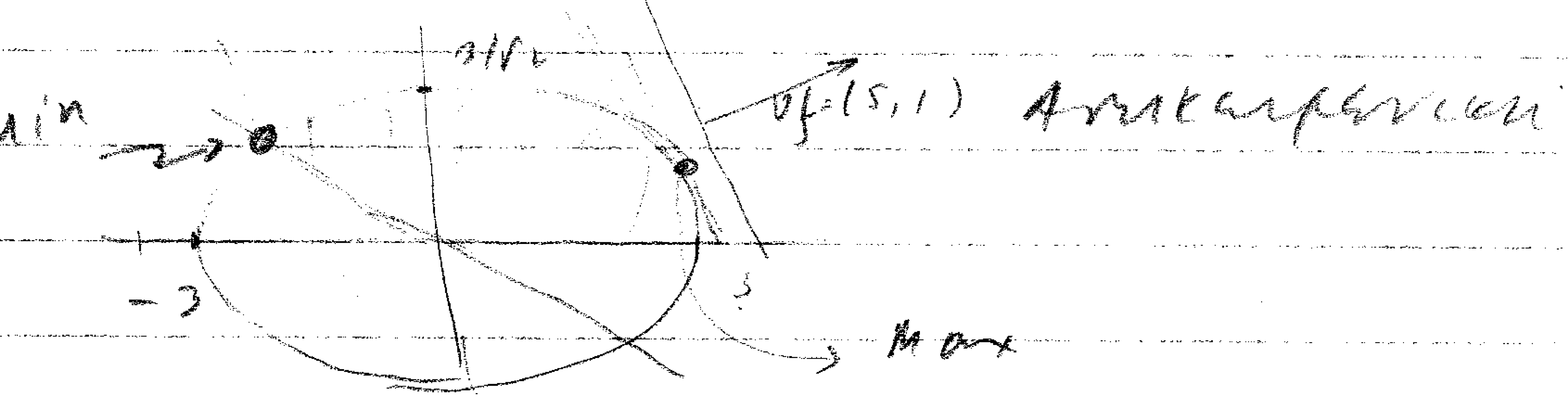
. Μη γραμμική διατύπωση!

Θέμα 3ο

(α) $\min f(x,y) = 5x + y$

s.t. $9 \geq x^2 + 2y^2$

$x + y \geq 0$



$$\mathcal{L} = -5x - y + \lambda(9 - x^2 - 2y^2) + \mu(x + y)$$

$\cdot\ \lambda(9 - x^2 - 2y^2) = 0 \quad \cdot\ \mu(x+y) = 0$

$\cdot\ \partial \mathcal{L}/\partial x = -5 - 2\lambda x + \mu = 0$

$\cdot\ \partial \mathcal{L}/\partial y = -1 - 4\lambda y + \mu = 0$

Το $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ικανοποιεί ισοτικά τους περιορισμούς, άρα $\lambda, \mu \geq 0$ (Δεν μηδενίζεται υποχρεωτικά κανένα από τα δύο).

Τα λ, μ πρέπει να ικανοποιούν

$$2\sqrt{3}\lambda + \mu = 5$$
$$-4\sqrt{3}\lambda + \mu = 1$$

Άρα (αφαιρώντας) $-6\sqrt{3}\lambda = -4 \to \lambda = \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq 0$

και $\mu = 1 + 4\sqrt{3}\lambda$

$= 1 + 4\sqrt{3}\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{11}{3} > 0$

Έχουν τα λ, μ αυτά δηλαδή, τα ΚΤ ικανοποιούνται

(β) $\mathcal{L} = 5x + y + \lambda(9 - x^2 - 2y^2) + \mu(x + y)$

$\cdot\ \partial \mathcal{L}/\partial x = 5 - 2\lambda x + \mu = 0 \qquad \cdot\ \lambda(9 - x^2 - 2y^2) = 0$

$\cdot\ \partial \mathcal{L}/\partial y = 1 - 4\lambda y + \mu = 0 \qquad \cdot\ \mu(x+y) = 0$

Προφανώς αν $\lambda = 0$ ΔΕΝ προκύπτει λύση.

Άρα $\lambda > 0$ και $x^2 + 2y^2 = 9$.

Αν $\mu > 0$, θα πρέπει $x+y=0$ άρα ένα από τα x, y είναι αρνητικό. Τότε δεν μπορεί να ισχύει $\partial L/\partial x = \partial L/\partial y = 0$ (π.χ. αν $y<0$ τότε $\partial L/\partial y = 1-4\lambda y+\mu > 0$)

Άρα $\mu = 0$.

Έτσι $x = \frac{5}{2\lambda}$ $y = \frac{1}{4\lambda}$ $\lambda > 0$

και εξίσωση

$$x^2+2y^2 = 9 \rightarrow \frac{5^2}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} = 9$$

οπότε το λ προσδιορίζεται ...

Εναλλακτική λύση: Από το σχήμα διαπιστώνουμε $\mu=0$ $x^2+2y^2=9$ (εφόσον το βέλτιστο $x+y>0$) οπότε λύνουμε το σύστημα των ΚΤ

$$\partial L/\partial x = 5-2\lambda x = 0$$
$$\partial L/\partial y = 1-4\lambda y = 0$$

όπως και προηγουμένως

4 (α) • Θέτουμε τις μεταβλητές στις θέσεις F1:F1000.

• Δημιουργούμε την ποσότητα $\sum_{j=1}^{1000} b_j x_j$ στο E1 ως

E1: = SUMPRODUCT(B1:B1000 ; F1:F1000)

και αντίστοιχα στο E2 την $\sum c_j x_j$

E2: = SUMPRODUCT(C1:C1000 ; F1:F1000)

και στο E5 την αντικειμενική $\sum a_j x_j$

E5: = SUMPRODUCT(A1:A1000 ; F1:F1000)

Στο SOLVER εισάγουμε

Max : E5

Μεταβλητές F1:F1000

Περιορισμοί

• F1:F1000 ≥ 0

• E1:E2 ≤ D1:D2

(β) Ορίζουμε δυαδικές στις θέσεις G1:G1000 που ονομάζουμε $y_1 \ldots y_{1000}$.

Προσθέτουμε τους περιορισμούς

$x_j \le M y_j$ M: μεγάλος αριθμός

• $\sum_{j=1}^{1000} y_j \le 5$

Η εισαγωγή στο Solver γίνεται αντίστοιχα όπως προηγουμένως

5. $\min f(x) = x^4 - x^2 - x$

$$f'(x) = g(x) = 4x^3 - 2x - 1 \qquad g'(x) = 12x^2 - 2$$

Θέτουμε $g(x) = 0$, οπότε η μέθοδος Νεύτωνα είναι $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)} = x_n - \frac{4x_n^3 - 2x_n - 1}{12x_n^2 - 2}$

Για $x_0 = 1$ είναι

$$x_2 = 1 - \frac{4 - 2 - 1}{12 - 2} = 0,9$$

$$x_3 = 0,9 - \frac{\overset{0,116}{4 \cdot 0,9^3 - 2 \cdot 0,9 - 1}}{\underset{7,72}{12 \cdot 0,9^2 - 2}}$$

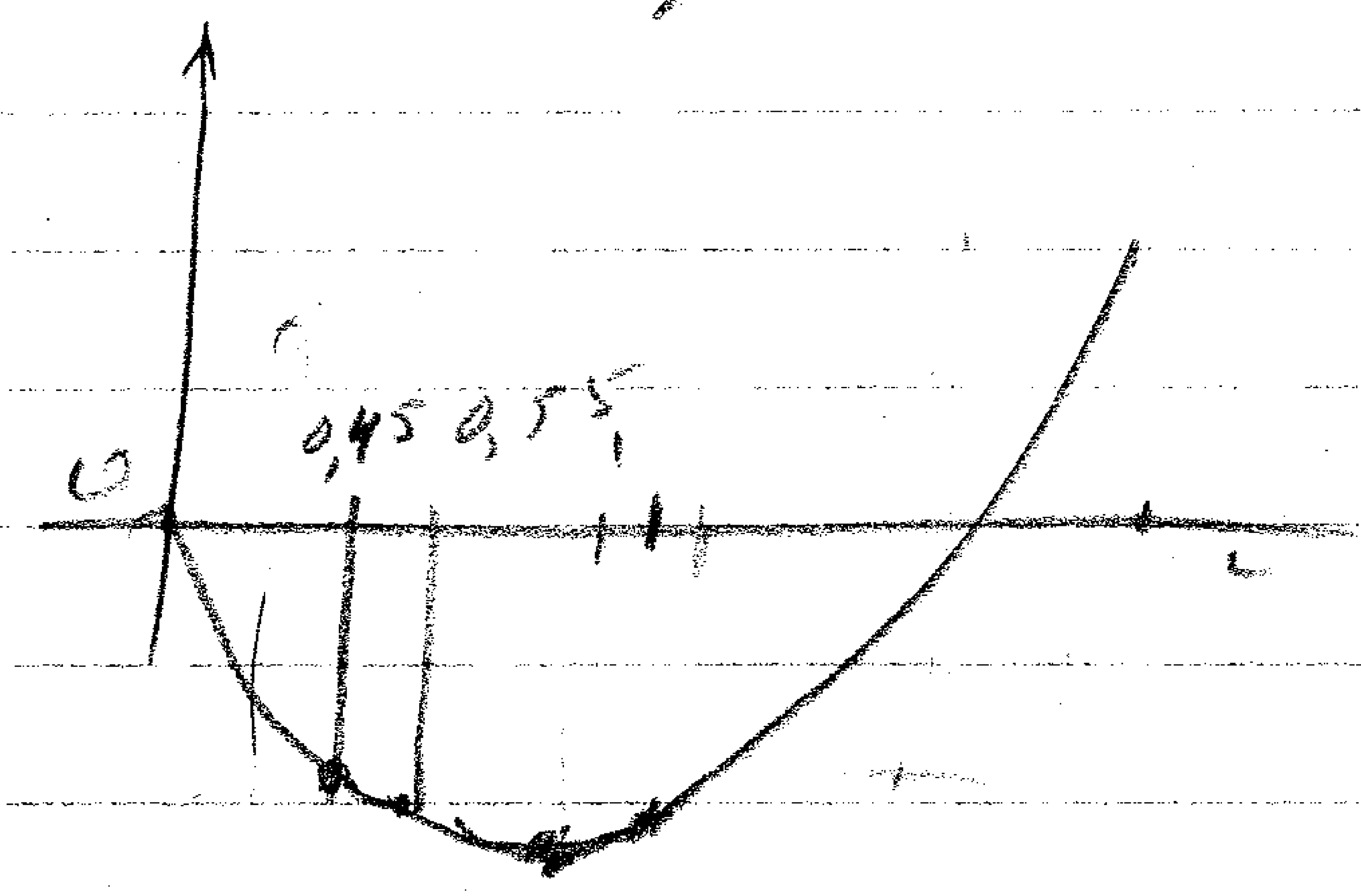
$$= 0,884$$

$$x_4 = 0,884 - \frac{-0,005}{7,37}$$

$$\cong 0,885$$

Εναλλακτικά: Μέθοδος Διχοτόμησης.

x	f
0	0
2	10
1,01	−0,99
0,99	−1,01



Άρα το ελάχιστο βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1+\varepsilon]$. Δοκιμάζουμε το 0,45 και 0,55 και προκύπτει ότι το ελάχιστο είναι στο $[0,45 , 1,01]$. Κατόπιν δοκιμάζουμε στο 0,75 και 0,76 κ.λ.π.