Επιχειρησιακή Έρευνα
Προοδος
Ιανουάριος 2009

Γράψτε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα έχει ίδια αξία. Διάρκεια 1 ώρα 30 λεπτά.

Θέμα 1

Μία εταιρεία εμφιάλωσης κρασιού έχει τη δυνατότητα να παράγει 3 τύπους κρασιού από 3 διαφορετικές ποικιλίες σταφυλιών Α, Β και Γ και θέλει να προγραμματίσει τη μηνιαία παραγωγή της. Η γραμμή παραγωγής του εργοστασίου της εταιρείας υποστηρίζει την παραγωγή το πολύ 50.000 φιαλών το μήνα, ενώ κάθε φιάλη απαιτεί 2 κιλά σταφυλιού της αντίστοιχης ποικιλίας για να παραχθεί. Η εταιρεία διαθέτει στις αποθήκες τις 40 τόνους, 50 τόνους και 25 τόνους σταφυλιών από τις ποικιλίες Α, Β και Γ αντίστοιχα. Έχει εκτιμηθεί ότι κάθε φιάλη της ποικιλίας Α θα αποφέρει στην εταιρεία καθαρό κέρδος 4 €, κάθε φιάλη της Β 3 € και κάθε φιάλη της Γ 7 €.

I. (50%) Διαμορφώστε το πρόβλημα προγραμματισμού μηνιαίας παραγωγής της εταιρείας που μεγιστοποιεί το συνολικό της κέρδος.
II. (25%) Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να παράγει και έναν τέταρτο τύπο κρασιού που χρειάζεται πάλι 2 κιλα σταφυλιού ανά φιάλη, αλλά αναμιγνύει σταφύλια από τις ποικιλίες Β και Γ σε αναλογία 40%-60%. Κάθε φιάλη του νέου τύπου θα αποφέρει καθαρό κέρδος 5 € στην εταιρεία. Διαμορφώστε το νέο πρόβλημα που προκύπτει.

(25%) Η επιτροπή ανταγωνισμού επιβάλλει έναν κανονισμό που επιτρέπει στην εταιρεία να παράγει το πολύ 2 διαφορετικούς τύπους κρασιού, μόνον από τους αρχικούς τύπους Α, Β και Γ. Διαμορφώστε το νέο πρόβλημα που προκύπτει. Προσπαθήστε να φτιάξετε <u>γραμμική</u> διαμόρφωση.

Θέμα 2

Έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$ με την μέθοδο αναζήτησης βαθμίδας, με αρχικό σημείο το (1,1,1). α. Εκτελέστε ένα βήμα αναζήτησης και β. Αποδείξτε ότι η διεύθυνση αναζήτησης στο δεύτερο βήμα είναι κάθετη στην διεύθυνση αναζήτησης το πρώτου βήματος.

Θέμα 3

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$Min\, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$$

με περιορισμούς

$$2x \geq y$$
$$x \geq 0$$

Υπόδειξη: *Μπορείτε να κάνετε διερεύνηση αρχίζοντας με την Λαγκρ. Μεταβλητή του δεύτερου περιορισμού.*

Θέμα 4

Έστω το πρόβλημα

$$min\, f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz-8x-8y-4z$$

με ισοτικούς περιορισμούς

$$2x^2 + y^2 + z^4 = 4$$
$$x+y-z = 1$$

(α) Επιβεβαιώστε ότι οι τιμές $x = y = z = 1$ ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες για βέλτιστο.

(β) Αν οι περιορισμοί γίνουν $2x^2 + y^2 + z^4 = 4{,}1$ και $x+y-z = 0{,}9$ και λυθεί το πρόβλημα με την ίδια αντικειμενική συνάρτηση, εκτιμείστε την τιμη της αντικειμενικής συνάρτησης στο νέο βέλτιστο.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ - ΠΡΟΟΔΟΣ 2009

(i) ΕΣΤΩ x_1, x_2, x_3 ΟΙ ΦΙΑΛΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΟΙΚΙΛΙΕΣ Α, Β, Γ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΠΟΥ ΘΑ ΠΑΡΑΧΘΟΥΝ.

$$\max \; 4x_1 + 3x_2 + 7x_3$$

υ.π.:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50.000$$
$$2x_1 \leq 40.000$$
$$2x_2 \leq 50.000$$
$$2x_3 \leq 25.000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ ΑΚΕΡΑΙΟΙ}$$

(ii) ΕΣΤΩ x_4 Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΦΙΑΛΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΜΙΚΤΟ ΤΥΠΟ

ΤΟΤΕ:

$$\max \; 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4$$

υ.π.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 50.000$$
$$2x_1 \leq 40.000$$
$$2x_2 + 2x_4 \cdot 0.4 \leq 50.000$$
$$2x_3 + 2x_4 \cdot 0.6 \leq 25.000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ ΑΚΕΡΑΙΟΙ}$$

(iii) ΕΙΣΑΓΟΥΜΕ ΝΕΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ y_1, y_2, y_3 ΟΠΟΥ:

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΥΠΟ } i \\ 1, & \text{ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΥΠΟ } i \end{cases}$$

ΝΕΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

$$\max \quad 4x_1 + 3x_2 + 7x_3$$

ε.π.:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 50.000$$

$$2x_1 \le 40.000 \cdot y_1$$

$$2x_2 \le 50.000 \cdot y_2$$

$$2x_3 \le 25.000 \cdot y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \le 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1, x_2, x_3 ΑΚΕΡΑΙΟΙ

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΤΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ:

$$\text{MAX} \quad 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 7x_3y_3$$

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 50000$$

$$2x_1 \le 40000 \quad (\text{χωρίς το } y_1 \ldots)$$

$$2x_2 \le 50000$$

$$2x_3 \le 25000$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \le 2$$

$$y \in \{0,1\}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$, ΑΚΕΡΑΙΟΙ..

2. $\nabla f(\bar{x}) = (2x, 2y, 4z)$ $\quad \nabla f(1,1,1) = (2,2,4)$

1° βήμα : $\min\limits_t f(\bar{x}_0 + t\nabla f(\bar{x}_0)) =$

$$= \min_t \left\{ (1+2t)^2 + (1+2t)^2 + 2(1+4t)^2 \right\}$$

Η παράγωγος είναι $4(1+2t) + 4(1+2t) + 16(1+4t)$
$= 4(2+4t+4+16t) = 4(6+20t)$
άρα $t = -3/10$ για ελάχιστο
επομένως το επόμενο σημείο είναι
$$\left(1-\frac{6}{10}, 1-\frac{6}{10}, 1-\frac{12}{10}\right) = (0{,}4, 0{,}4, -0{,}2)$$
με διεύθυνση αναζήτησης $2(0{,}4, 0{,}4, -0{,}4)$
Το εσωτερικό γινόμενο των διευθύνσεων είναι
$$2(1,1,2)\cdot 2\cdot 0{,}4(1,1,-1) = 4\cdot 0{,}4\,(1+1-2) = 0$$
άρα είναι κάθετες.

3. $L = -x^2 - y^2 + 2y + \lambda(2x-y) + \mu x$

$\lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda(2x-y) = 0, \; \mu x = 0$

$\partial L/\partial x = -2x + 2\lambda + \mu = 0 \qquad (1)$

$\partial L/\partial y = -2y + 2 - \lambda = 0 \qquad (2)$

Αν $\mu > 0$ τότε $x = 0$ οπότε πρέπει από την (1) $2\lambda + \mu = 0$, άτοπο έχουμε $\lambda \geq 0, \mu > 0$.
Άρα $\mu = 0$. Αν $\lambda = 0$, τότε από την (1) $x = 0$ και από την (2) $y = 1$, που όμως δεν ικανοποιεί την $2x \geq y$, άρα $\lambda > 0$ ή $2x = y$. Από την (1) $x = \lambda$ και από την (2) $-4x + 2 - x = 0$ ή
$x = 2/5 \quad y = 4/5$.

4. $L = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 8x - 8y - 4z$
$+ \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \mu(x + y - z - 1)$

Για $x = y = z = 1$ οι περιορισμοί ικανοποιούνται.

Συνθήκες Lagrange:

$$\partial L/\partial x = 6x + 2y - 8 + \lambda 4x + \mu = 0$$

$$\partial L/\partial y = 4y + 2x + 2z - 8 + 2\lambda y + \mu = 0$$

$$\partial L/\partial z = 2z + 2y - 4 + 2\lambda z - \mu = 0$$

Για $x = y = 1$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} 4\lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \mu = 0$$

- Άρα $\Delta f = \Sigma \lambda \Delta g = 0 = 0 \cdot 0{,}1 + 0(-0{,}1) = 0$
- Άρα δεν παίρνουμε αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση τάξεως Δx (η αλλαγή είναι τάξεως Δx^2..). Έτσι η τιμή της αντικειμενικής παραμένει $f(1,1,1) =$

$$= 3+2+1+2+2-20 = -10 \pm (0{,}1)^2$$