Επιχειρησιακή Έρευνα - Επαναληπτική Εξέταση – Σεπτέμβριος 2015
Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με χειρόγραφες σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5ο ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά.

Θέμα 1
Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\ f(x, y) = 3x+2y$$

με περιορισμούς

$$x-3y\leq 2$$
$$-x + 3y\leq 15$$
$$x + y\leq 10$$
$$x, y \geq 0$$

(α-60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex
(β-30%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker
(γ- 10%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βελτίστου αν οι περιορισμοί γίνουν ως εξής, με ίδια αντικειμενική συνάρτηση

$x-3y \leq 2 \quad -x + 3y\leq 15{,}1 \quad x + y\leq 10{,}1 \quad x, y \geq 0{,}1$

Θέμα 2
Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μόνο εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Η ανά εβδομάδα διαθέσιμη εργασία είναι 2000 εργατοώρες με πάγιο κόστος, η δε αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

	Κέρδος/τεμάχιο	Εργατοώρες ανά τεμάχιο	Όγκος τεμαχίου σε κυβικά
Α	4	2	3
Β	3	6	2
Γ	5	8	4

(α) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης την εβδομάδα αγνοώντας περιορισμούς ακεραιότητας και κατόπιν θεωρώντας περιορισμούς ακεραιότητας. Τι σημαίνουν οι περιορισμοί ακεραιότητας για τον χρόνο επίλυσης του προβλήματος σε ενα εμπορικό λογισμικό; **(β)** Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επιπλέον έως 1000 εργατοώρες υπερωρίας με κόστος 5 €/ώρα **(γ)** Αν για κάθε προϊόν υπάρχει ένα πάγιο κόστος «εκκίνησης» της παραγωγής του πχ. 5000 μονάδων (ανεξαρτήτως του επιπέδου παραγωγής), πώς θα διαμορφώνατε το πρόβλημα; **(δ)** Μπορούμε να νοικιάσουμε μία επιπλέον αποθήκη χωρητικότητας 1000 κυβικών έναντι 2000 ευρώ την εβδομάδα. Διαμορφώστε το πρόβλημα του αν θα την νοικιάζαμε ή όχι.
Οι περιορισμοί-δυνατότητες στο β,γ,δ είναι επιπλέον των προηγουμένων

Θέμα 3
(α) Μία εταιρεία εισαγωγής αυτοκινήτων διαθέτει 14 αυτοκίνητα μιάς μάρκας. Το καθένα θα εκτεθεί σε μία από τρείς εκθέσεις αυτοκινήτων στις περιοχές Α, Β, Γ. Αν ένα αυτοκίνητο εκτεθεί σε κάποια έκθεση δεν μπορεί να μετακινηθεί σε άλλη. Τα κέρδη που θα προκύψουν αν στην κάθε έκθεση διατεθεί ένας αριθμός αυτοκινήτων δίνεται στον παρακάτω πίνακα.
<u>Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό</u> υπολογίστε την καλύτερη κατανομή αυτοκινήτων σε εκθέσεις. Γράψτε οπωσδήποτε την εξίσωση δυναμικου προγραμματισμού για το πρόβλημα αυτό.
Παρατήρηση: ΔΕΝ ενδιαφέρει να μαντέψετε την σωστή λύση!

Έκθεση / Αριθμός αυτοκινήτων	A	B	Γ
1	2	3	3
2	3	3	3
3	5	6	5
4	6	6	6
5	7	8	7
6	8	8	8
7	10	8	11
8 ή περισσότερα	13	10	13

(β) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 5400 τεμάχια/έτος χωρίς να είναι επιτρεπτές καθυστερήσεις. Σε κάθε παραγγελία χρεώνεται ένα πάγιο 600 € συν 3 € ανά τεμάχιο για ποσότητες παραγγελίας έως 800 τεμάχια, ενώ για τα τεμάχια άνω των 800 η επιβάρυνση είναι 1 € ανά τεμάχιο. Το κόστος αποθήκευσης είναι 2 € ανά μήνα και τεμάχιο. Ποια η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας;

Θέμα 4

(α) Έστω η εξίσωση διαφορών $x_n=4x_{n-1}-x_{n-2}$ με συνοριακές συνθήκες $x_0=1$ $x_1=-1$.

ι. Υπολογίστε το x_{1000} με κάποιο «τύπο» που να περιλαμβάνει δυνάμεις κλπ.

ιι. Ίδια ερώτηση για την εξίσωση διαφορών $x_n=4x_{n-1}+5x_{n-2}+n$

ιιι. *Προαιρετικό*: Σχολιάστε πώς θα λύνατε την εξίσωση διαφορών $x_n=x_{n-1}-4x_{n-2}$

(β) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$Min\ x+3y$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x^2 + 2y^2 \leq 4$$

$$x \geq 1$$

(Υπόδειξη: Θα βοηθούσε ένα σχήμα..)

Θέμα 5

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = 3x^2+y^2+2xy-2x+15$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε.
α. Υπολογίστε το ελάχιστο αναλυτικά χρησιμοποιώντας μόνο συνθήκες πρώτης τάξης. β. Με αρχικό σημείο το $(0,0)$ εκτελέστε δύο βήματα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας και εκτιμείστε πόσο πλησίασε η μέθοδος στο βέλτιστο γ. Ίδια ερώτηση όπως στο β. για την μέθοδο αναζήτησης συντεταγμένων

(β) Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\max \sum_{i=1}^{2000} a_i e^{x_i}$$

Με περιορισμούς

$$\prod_{i=1}^{2000} b_i x_i^{\Gamma} \leq b \ \text{και} \ \sum_{i=1}^{2000} c_i / x_i^{\Gamma} \leq c$$

$$x_i \geq 0 \ \gamma\iota\alpha \ i = 1,\ldots,1000$$

Οι παράμετροι του προβλήματος a_i, b_i, c_i έχουν εγγραφεί σε ένα φύλλο λογισμικού στις θέσεις *A1:A2000, B1:B2000, C1:C2000*, τα *b,c* στις θέσεις *D1,D2* αντίστοιχα και το Γ στην θέση *D3*. Διατυπώστε το πρόβλημα σε Solver κάνοντας «λίγες» πληκτρολογήσεις. Συγκεκριμένα διαμορφώστε το σχετικό φύλλο λογισμικού και συμπληρώστε το «παράθυρο διαλόγου» του Solver. Ο τελεστής Π σημαίνει γινόμενο

Εξέταση Σεπτ. 15
Πρόχειρες λύσεις

1

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & z \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ 5 \\ 10 \end{matrix}
\end{array}$$

$1,\ -2/3,\ +1,\ -1/3$

$$\begin{bmatrix} 11/3 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & z-10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ -1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 5 \\ 4/3 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$-11/4,\ 1/4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & -11/4 & z-\frac{95}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 25/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$-1/4,\ -1/4,\ +1/4$

17 25

$\frac{95}{17}$ 4 $\frac{112}{4}$ 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4 & 0 & -11/4 & z-28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & 2 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 8 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 8 \quad y = 2$
$s_1 = 0 \quad s_2 = 17$
$s_3 = 0$

$$\mathcal{L} = 3x + 2y + \mu_1(2 - x + 3y) + \mu_2(15 + x - 3y) + \mu_3(10 - x - y) + v_1 x + v_2 y$$

$v_1 x = v_2 y = 0 \longrightarrow v_1 = v_2$ εφόσον $x, y > 0$

$\mu_1(2 - x + 3y) = 0 \longrightarrow \mu_1 \geq 0$

$\mu_2(15 + x - 3y) = 0 \longrightarrow \mu_2 = 0$

17

$\mu_3(10 - x - y) = 0 \longrightarrow \mu_3 \geq 0$

$\partial\mathcal{L}/\partial x = 3 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + v_1 = 0$

$\longrightarrow \mu_1 + \mu_3 = 3$

$\partial\mathcal{L}/\partial y = 2 + 3\mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3 + v_2 = 0$

$\longrightarrow -3\mu_1 + \mu_3 = 2$

3 $\begin{cases} \mu_1 + \mu_3 = 3 \\ -3\mu_1 + \mu_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \mu_3 = 11/4 & > 0 \\ \mu_1 = 1/4 & > 0 \end{matrix}$

Άρα ικανοποιούνται

$\Delta z = z_{νεο} - z_{παλ} = -\mu_1 \cdot 0 - \mu_2 \cdot 0{,}1 \cdot \mu_3 \cdot 0{,}1 \cdot \nu_1 \cdot 0{,}1 + \nu_2 \cdot 0{,}1$

$= -11/4$ Άρα $z_N = 28 + 1{,}1/4 \simeq 28{,}275$

2. (α) max $4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma$

$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \leq 2000$

$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \leq 1000$

$x_A, x_\Gamma, x_\Gamma \geq 0$

π3/και x_A, x_B, x_Γ ακέραιοι

Με ακεραιότητα είναι instance NP complete

(β) max $4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - 5x_4$

$0 \leq x_4 \leq 1000$

και ο 1ος περιορισμός

$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \leq 2000 + x_4$

(γ) max $4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - 5x_4$

$+ 5000(y_A + y_B + y_\Gamma)$

$y_A, y_B, y_\Gamma \in \{0, 1\}$

$x_A \leq M y_A \quad x_B \leq M y_B \quad x_\Gamma \leq M y_\Gamma$

M: μεγάλος αριθμός

(δ) max $4x_A + 3x_\Gamma + 5x_\Gamma - 5x_4$

$- 5000(y_A + y_B + y_\Gamma) - 2000\, y_{Απο\theta}$

$y_{Απο\theta} \in \{0, 1\}$

ο 2ος περιορισμός

$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \leq 1000 + y_{Απο\theta} \cdot 1000$

3. $$F_{J \cup K}(x) = \max_{0 \le y \le x} \{ g_K(y) + F_J(x-y) \}$$

$F_J(x)$: μέγιστο κέρδος με x αποκόμματα σε J εκδόσεις J: σύνολο!

$g_K(y)$: όφελος από y αποκόμματα στην k έκδοση

$$F_A(x) = g_A(x)$$

Προφανώς στην B αποδεχόμαστε 0, 1, 3, 5, ή 8 αποκόμματα εφόσον το 2 είναι χειρότερο του 1 κλπ!

Υπολογισμοί: $F_{AB}(1) = \max \{2, \underset{y=1}{3}\} = 3$

$$F_{AB}(2) = \max_{y=0,1} \{0 + F_A(2); 3 + F_A(1)\} = 6$$

$$F_{AB}(3) = \max_{y=0,1,3} \{0 + F_A(3); 3 + F_A(2); 6 + F_A(0)\} = 6$$

$$F_{AB}(4) = \max_{y=0,1,3} \{0 + F_A(4); 3 + F_A(3); 6 + F_A(1)\} = 8$$

$$F_{AB}(5) = \max_{0,1,3,5} \{0 + F_A(5); 3 + F_A(4); 6 + F_A(2); 8 + F_A(0)\} = 9$$

$$F_{AB}(6) = \max_{0,1,3,5} \{0 + F_A(6); 3 + F_A(5); 6 + F_A(3); 8 + F_A(1)\} = 11$$

$$F_{AB}(7) = \max_{0,1,3,5} \{0 + F_A(7); 3 + F_A(6); 6 + F_A(4); 8 + F_A(2)\} = 12$$

$$F_{AB}(8) = \max_{0,1,3,5,8} \{0 + F_A(8); 3 + F_A(7); 6 + F_A(5); 8 + F_A(3); 10\} = 13$$

$$F_{AB}(9) = \max_{1,3,5,8} \{0 + F_A(9); 3 + F_A(8); 6 + F_A(6); 8 + F_A(4); 10 + 2\} = 16$$

$$F_{AB}(10) = \max_{1,3,5,8} \{3 + F_A(9); 6 + F_A(7); 8 + F_A(5); 13\} = 16$$

$$F_{AB}(11) = \max_{3,5,8} \{6 + F_A(8); 8 + F_A(6); 10 + F_A(3)\} = 16$$

$$f_{AB}(12) = \max_{3,5,8}\left\{ 6 + \overset{10}{f_A}(9)_{3} ;\ 8 + \overset{8}{f_A}(7)_{5} ;\ 10 + \overset{6}{f_A}(4) \right\} =$$

$$F_{AB}(13) = \max\left\{16 ;\ 8 + \overset{10}{f_{AB}}(8) ;\ \underline{10 + \overset{7}{f_A}(5)} \right\} = 17$$

$$F_{AB}(14) = \max\left\{ \underset{3}{16},\ \underset{5}{18},\ \underline{10 + \overset{8}{F_A}(6)}_{8} \right\} = 18$$

$$f_{AB\Gamma}(14) = \max_{y=0,1,2,4,5,6,7,8} \left\{ \overset{18}{F_{AB}}(14)_{0} ; 3 + \overset{17}{F_{AB}}(13)_{1} ; 5 + \overset{16}{F_{AB}}(11)_{3} ;\right.$$
$$\left. 6 + \overset{14}{F_{AB}}(10)_{4} ; 7 + \overset{16}{F_{AB}}(9) ; 8 + \overset{13}{F_{AB}}(8) ; 11 + \overset{12}{F_{AB}}(7) ; \underline{13 + \overset{11}{F_{AB}}(6)} \right\}$$
$$= 24$$

Άρα 8 πο Γ, 3 πο A, 3 πο B αθροισμα 24.
αθροισμα $13 + 5 + 6 = 24$

6. Ζητηση $\frac{5400}{12} = 450$ τεμ/μηνα

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 450}{2}} = 519{,}6 \cong 520$$

$$600 + 3 \cdot 800 = K' + 1 \cdot 800 \rightarrow K' = 600 + 1600 = 2200$$

$$= 2200 \qquad EOQ_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2200 \cdot 450}{2}} \cong 995$$

$$\text{κοστος I} = \sqrt{2K_1DJ} + p_1D = 735 + 3 \cdot 450 = 2.085$$

$$= \sqrt{2K_2DJ} + p_2D = 1407 + 1 \cdot 450 = 1.857$$

Προτιμουμε το EOQ_2 = 995

7. $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ $s^2 = 4s - 1$

$s^2 - 4s + 1 = 0$ $\rho_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$A\rho_1^0 + B\rho_2^0 = 1 \longrightarrow A + B = 1$
$A(2+2\sqrt{3}) + B(2-2\sqrt{3}) = -1$
} $A, B \ldots$

Δοκιμάζουμε $x_n^{(\varepsilon)} = Pn + Q$

$Pn + Q = 4(P(n-1) + Q) + 5(P(n-2) + Q) + n$

$Pn + Q = 4Pn - 4 + 4Q + 5Pn - 10P + 5Q + n$

$\underbrace{(P - 4P - 5P - 1)}_{0} n + Q + 4 - 4Q + 10P - 5Q = 0$

$-8P = 1 \to P = -1/8$ $(-8Q + 4 - 8) = 0$

$Q = -1/2$

$s^2 - 4s - 5 = 0 \longrightarrow \rho_{1,2} = (\rho - 5)(\rho + 1)$

Λυση $A5^n - B(-1)^n + Pn + Q$

Βρίσκουμε A, B από αρχικές συνθήκες...

Η ε.δ. $x_n = x_{n-1} - 4x_{n-2}$ με χ.π.

$s^2 = s - 4$ έχει μιγαδικές ρίζες! $\Delta = 1 - 16 = -15$ άρα οι λύσεις είναι ημιτονοειδείς...

8. $\mathcal{L} = -x - 3y + \lambda(4 - x^2 - 2y^2) + \mu(x - 1)$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = -1 - 2x\lambda + \mu = 0$

$\partial \mathcal{L}/\partial y = -3 - 4\lambda y = 0 \longrightarrow \lambda > 0$

Άρα $x^2 + 2y^2 = 4$. $\lambda > 0$ ισοτικός περιορισμός

Αν $\mu = 0$ $y = -3/(4\lambda)$, $x = -1/(2\lambda)$ $x, y < 0$

αλλά απαιτούμε $x \geq 1$! Άρα $\mu > 0$

$x = 1$ και $2y^2 = 3$, $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

5. a

$$\partial f/\partial x = 6x + 2y - 2 = 0 \qquad \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\partial f/\partial y = 2y + 2x = 0$$

$$x = 1/2 \quad y = -1/2$$

Συντεταγμένες $(0,0) \to \min_x (3x^2 - 2x) \to 6x - 2 = 0$

$x = 1/3$

$(1/3, 0) \to \min (y^2 + \frac{2}{3} y) \to 2y + 2/3 = 0$

$y = -1/3$ άρα $(1/3, -1/3)$ κοντά στο $(1/2, -1/2)$

Βαθμίδα $\nabla f = (6x + 2y - 1, 2y + 2x)$

Στο 0 $\nabla f = (-1, 0)$ άρα

$x \to -t \quad y = 0 \quad \min_t 3t^2 + 2t \to t = -1/3$

$x = 1/3 \quad y = 0,$

$\nabla f = (1, 2/3) \qquad (x,y) \to (1/3 + t, 2/3\, t)$

$\min 3(\frac{1}{3} + t)^2 \ldots$ κλπ.