

## Επιχειρησιακή Έρευνα - Τελική Εξέταση – Ιούνιος 2015

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με χειρόγραφες σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5° ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά.

### Θέμα 1

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\text{Max } f(x, y) = 3x + 2y$$

με περιορισμούς

$$x \leq 2$$

$$x + 3y \leq 15$$

$$2x + y \leq 10$$

$$x, y \geq 0$$

(α-60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

(β-30%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker

(γ- 10%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βελτίστου αν οι περιορισμοί γίνουν ως εξής, με ίδια αντικειμενική συνάρτηση

$$x \leq 1,9 \quad x + 3y \leq 15,1 \quad 2x + y \leq 10 \quad x, y \geq 0,1$$

### Θέμα 2

(α) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 200 τεμάχια/μήνα, και εξετάζει τις προσφορές δύο προμηθευτών. Ο πρώτος έχει πάγιο παραγγελίας 100 ευρώ και τιμή μονάδας 3 ευρώ ανά τεμάχιο. Ο δεύτερος χρεώνει πάγιο 150 ευρώ και τιμή 2,5 ευρώ ανά τεμάχιο. Αν το κόστος αποθήκευσής μας είναι 1 ευρώ ανά τεμάχιο και μήνα, ποιά προσφορά θα δεχθεί η εταιρεία;

(β) Ο πρώτος προμηθευτής «βελτιώνει» την προσφορά του αναφέροντας ότι δεν θα χρεώνει τιμή μονάδος στις ποσότητες άνω των 500 τεμαχίων και θα χρεώνει πάντα το ίδιο πάγιο. Ποιόν προμηθευτή θα επιλέξει τώρα η εταιρεία;

(γ) Μία άλλη εταιρεία έχει κόστος προμήθειας μίας πρώτης ύλης που δίνεται από την συνάρτηση

$$K(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 8 + 20q & \text{αν } q>0 \end{cases}$$

Θέλει να κάνει προγραμματισμό 4 περιόδων  $j=1, 2, 3, 4$  (τώρα βρίσκεται στην περίοδο 1) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος προμηθειών - αποθήκευσης. Θεωρεί ότι η ζήτηση στις επόμενες περιόδους είναι  $d_1=5, d_2=1, d_3=2, d_4=7$  και δεν επιτρέπεται καθυστέρηση, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 0,5 €/μονάδα - περίοδο. (i) Διατυπώστε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού – ορίστε προσεκτικά την συνάρτηση βελτίστου (ii) Λύστε την και προσδιορίστε τόσο το ελάχιστο κόστος όσο και την ποσότητα παραγωγής σε κάθε περίοδο

### Θέμα 3

α. Μία εταιρεία παραγωγής πλυντηρίων έχει δεχθεί για τον επόμενο μήνα παραγγελίες από πελάτες Α, Β, Γ, Δ ως εξής: 300 πλυντήρια από τον πελάτη Α, 400 από τον Β, 500 από τον Γ και 200 από τον Δ. Η εταιρεία διαθέτει πέντε εργοστάσια σε διαφορετικές τοποθεσίες και ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει το κόστος μεταφοράς ανά πλυντήριο από κάθε εργοστάσιο προς καθένα από τους πελάτες. Το 1° εργοστάσιο μπορεί να παραγάγει έως 200 πλυντήρια, το 2° έως 300, το 3° 500 το 4° έως 200 το 5° έως 200. Η εταιρεία θέλει να αποφασίσει πόσα πλυντήρια θα μεταφέρει τον επόμενο μήνα από κάθε εργοστάσιο προς κάθε πελάτη έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος

Πελάτης	A	B	Γ	Δ
	Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς			
1	12	20	5	7
2	9	7	11	8
3	10	30	9	7
4	13	5	8	6
5	9	10	4	30

- (i) Διαμορφώστε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους μεταφοράς. Θεωρείτε ότι είναι εύκολο να επιλυθεί από ένα λογισμικό βελτιστοποίησης;
- (ii) Δείξτε πώς θα εισάγετε το παραπάνω πρόβλημα σε solver
- (iii) Επιπλέον των παραπάνω περιορισμών, τα πλυντήρια μεταφέρονται με φορτηγά χωρητικότητας 10 πλυντηρίων το καθένα, με πάγιο κόστος 100 χρηματικών μονάδων ανά φορτηγό. Το κόστος των φορτηγών είναι επιπλέον του κόστους που αναφέρθηκε προηγουμένως. Διαμορφώστε το πρόβλημα (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε επιπλέον μεταβλητές για τα φορτηγά)
- (iiii) Επιπλέον των παραπάνω φορτηγών διατίθενται και μικρότερα φορτηγά με χωρητικότητα 5 πλυντηρίων και πάγιο κόστος 50. Διαμορφώστε το πρόβλημα.  
(Υπόδειξη: εισάγετε δύο είδη μεταβλητών για τα φορτηγά..)

#### Θέμα 4

- (α) Έστω η εξίσωση διαφορών  $x_n = 4x_{n-1} + 5x_{n-2}$  με συνοριακές συνθήκες  $x_0 = 1$   $x_1 = -1$ .
- i. Υπολογίστε το  $x_{1000}$  με κάποιο «τύπο» που να περιλαμβάνει δυνάμεις κλπ.
- ii. Ίδια ερώτηση για την εξίσωση διαφορών  $x_n = 4x_{n-1} + 5x_{n-2} + 3$
- iii. Προαιρετικό: Σχολιάστε πώς θα λύνετε την εξίσωση διαφορών  $x_{n-1} - 5x_{n-2}$
- (β) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$\text{Max } x + 3y$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x^2 + 2y^2 \leq 4$$

$$y \geq 1$$

(Υπόδειξη: Θα βοηθούσε ένα σχήμα..)

#### Θέμα 5

- (α) Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\text{Max } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5$$

με περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Λύστε το με την μέθοδο Simplex.

Υπόδειξη: Εντοπίστε πρώτα μία αρχική βασική λύση. Θα μπορούσατε να δοκιμάσετε μία λύση που έχει βασικές μεταβλητές τις  $x_1, x_2$

- (β) Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία. Το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 10%, τυπική απόκλιση 10% ενώ το δεύτερο 15% και 20% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων -0,5. Επίσης υπάρχει ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 5%. Ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση επί του κεφαλαίου του τουλάχιστον 15%. Επιβεβαιώστε ότι στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο τα μερίδια των επενδύσεών του στα αβέβαια περιουσιακά στοιχεία  $x_1, x_2$  ικανοποιούν την σχέση  $x_1 = 2x_2$  και κατόπιν υπολογίστε τα μερίδια των κεφαλαίων που θα επενδύσει σε κάθε περιουσιακό στοιχείο. (Εναλλακτικά, απλώς υπολογίστε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο...)