Επιχειρησιακή Έρευνα - Τελική Εξέταση – Ιούνιος 2013

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με χειρόγραφες σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5° ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα σε περίπτωση που παραδώσετε το γραπτό σας στο τέλος της εξέτασης.

Θέμα 1.

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\, f(x, y) = 3x+2y$$

με περιορισμούς

$$x \leq 4$$
$$x + 3y \leq 15$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x, y \geq 0$$

(α 50%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

(β 30%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker

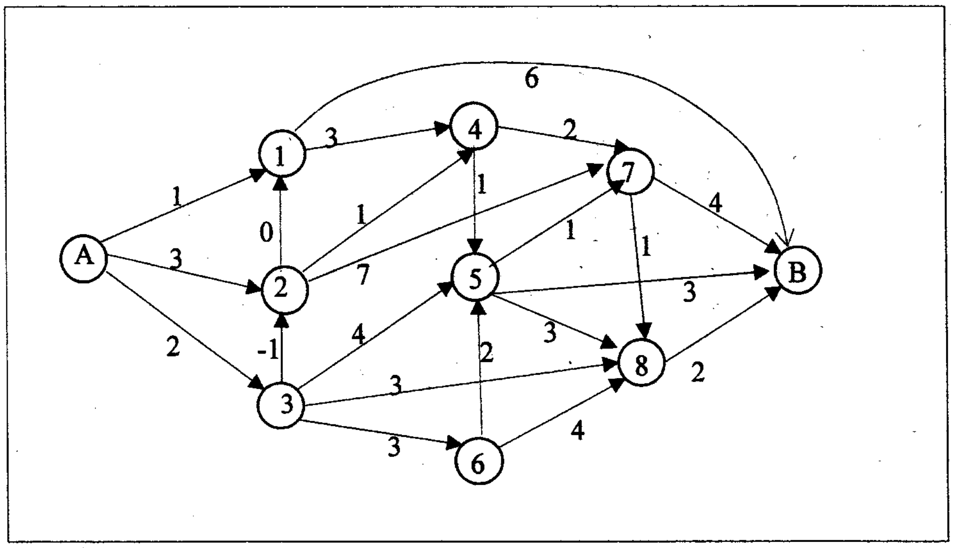
(γ 20%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βελτίστου αν οι περιορισμοί γίνουν ως εξής, με ίδια αντικειμενική συνάρτηση

$$x \leq 3,9$$
$$x + 3y \leq 15,1$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x, y \geq 0$$

(Για – μικρή - πρόσθετη βαθμολογία: Δείξτε διαγραμματικά την πορεία της simplex..)

Θέμα 2

(α 50%) Εντοπίστε την διαδρομή ελαχίστου συνολικού μήκους μεταξύ των κορυφών Α και Β στο παρακάτω γράφημα



(β 50%) Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία. Το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 10%, τυπική απόκλιση 10% ενώ το δεύτερο 15% και 20% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων -0,5. Επίσης υπάρχει ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 5%. Ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση επί του κεφαλαίου του τουλάχιστον 15%. Επιβεβαιώστε ότι στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο τα μερίδια των επενδύσεων του στα αβέβαια περιουσιακά στοιχεία x_1, x_2 ικανοποιούν την σχέση $x_1=2x_2$ και κατόπιν υπολογίστε τα μερίδια των κεφαλαίων που θα επενδύσει σε κάθε περιουσιακό στοιχείο. (Εναλλακτικά, απλώς υπολογίστε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο…)

Θέμα 3

(α 30%) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 200 τεμάχια/μήνα, και εξετάζει τις προσφορές δύο προμηθευτών. Ο πρώτος έχει πάγιο παραγγελίας 100 ευρώ και τιμή μονάδας 3 ευρώ ανά τεμάχιο. Ο δεύτερος χρεώνει πάγιο 150 ευρώ και τιμή 2,5 ευρώ ανά τεμάχιο. Αν το κόστος αποθήκευσής μας είναι 1 ευρώ ανά τεμάχιο και μήνα, ποιά προσφορά θα δεχθεί η εταιρεία;

(β 40%) Εξετάστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min F(Q)=KD/Q+pD+sQ/2$$

με περιορισμό $0\leq Q\leq M$

με K,D,p,s,M γνωστές θετικές παραμέτρους. Αποδείξτε ότι το βέλτιστο είναι $Q^*=(2KD/s)^{1/2}$ αν $(2KD/s)^{1/2}\leq M$, διαφορετικά το βέλτιστο είναι $Q^*=M$. Ερμηνεύστε την λύση που βρήκατε στα πλαίσια του προβληματος προμήθειας στο (α) παραπάνω – καθώς και το (γ) παρακάτω.

(γ 30%) Η εταιρεία που περιγράφηκε στο (α) παραπάνω διαθέτει αποθήκη χωρητικότητας μόνο 100 τεμαχίων. Ποιόν προμηθευτή θα επιλέξει στην περίπτωση αυτή;

Θέμα 4

(α 50%) Μία εταιρεία διαθέτει προϋπολογισμό επενδύσεων 10 εκατ. ευρώ. Εξετάζει 4 υποψήφια επενδυτικά σχέδια. Το κάθε σχέδιο μπορεί είτε να γίνει αποδεκτό είτε να απορριφθεί. Για κάθε σχέδιο είναι γνωστή η δαπάνη του καθώς και το (καθαρό) όφελός του. Θα πρέπει να επιλέξουμε ποια σχέδια θα επιλεγούν ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο συνολικό καθαρό όφελος με συνολικές δαπάνες το πολύ 10 εκατ. Τα χαρακτηριστικά των επενδυτικών σχεδίων δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Επενδυτικό σχέδιο	**Α**	**Β**	**Γ**	**Δ**
Καθαρό όφελος	2	3	5	8
Δαπάνη	3	4	6	7

ι. Γράψτε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού

ιι. Λύστε την και δείξτε ποιες επενδύσεις επιλέγονται (*παρατήρηση: ΔΕΝ ενδιαφέρει να μαντέψετε την σωστή λύση, που άλλωστε είναι προφανής*)

(β 50%) Βρείτε ένα αναλυτικό τύπο που δίνει τον n-στο όρο της εξίσωσης διαφορών

$x_n= 2x_{n-1}+8x_{n-2}+n+2$ με αρχικές τιμές $x_0= x_1=0$. Επιβεβαιώστε τον τύπο σας για π.χ. $n=3$.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε ειδική λύση της μορφής $X(n)=an+b$ και εκτιμείστε τις παραμέτρους a,b.

Θέμα 5

(α 50%) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$Max\ x+3y$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x^2 + 2y^2 \leq 4$$

$$y \geq 1$$

(*Υπόδειξη: Θα βοηθούσε ένα σχήμα..*)

(β 50%) Μία εταιρεία έχει κόστος προμήθειας μίας πρώτης ύλης που δίνεται από την συνάρτηση

$$K(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 10+20q & \text{αν } q>0 \end{cases}$$

Θέλει να κάνει προγραμματισμό 4 περιόδων $j =1, 2, 3, 4$ (τώρα βρίσκεται στην περίοδο 1) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος προμηθειών - αποθήκευσης. Θεωρεί ότι η ζήτηση στις επόμενες περιόδους είναι $d_1=5$, $d_2=1$ $d_3=2$ $d_4=6$ και δεν επιτρέπεται καθυστέρηση, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 1 €/μονάδα - περίοδο.

(ι) Διατυπώστε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (ιι) Λύστε την και προσδιορίστε την βέλτιστη ποσότητα παραγωγης σε κάθε περίοδο (ιιι) Έστω ότι δεν είναι δυνατό να παραχθούν 7 ή περισσότερες μονάδες σε οποιαδήποτε περίοδο. Γράψτε την εξίσωση ΔΠ που θα ισχύσει και σχολιάστε την λύση της σε σχέση με αυτή που γράψατε στο (ι).

Επιχ. Έρευνα Ιούνιος 13
Πρόχειρες λύσεις

1. (α)

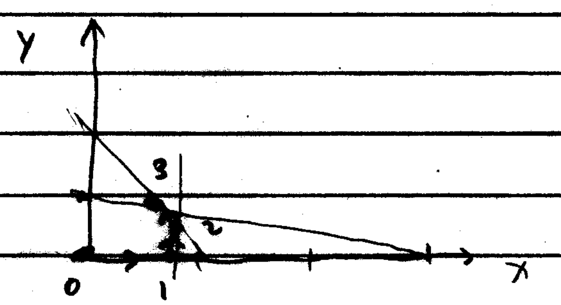
$$\begin{array}{c} -3 \\ -1 \\ -2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 4/1 \\ 15/1 \\ 10/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ -3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ 11/3 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -1/5 \\ -1/5 \\ \\ 2/5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -16 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/5 & 0 & 0 & -7/5 & -17 \\ 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -6/5 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 3 \quad y = 4 \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0$



(β) $\mathcal{L} = 3x + 2y + \lambda_1(4 - x) + \lambda_2(15 - x - 3y)$
$\qquad + \lambda_3(10 - 2x - y) + \lambda_4 x + \lambda_5 y$

$\partial\mathcal{L}/\partial x = 3 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0$

$\partial\mathcal{L}/\partial y = 2 \quad - 3\lambda_2 - \lambda_3 \quad + \lambda_5 = 0$

Επειδή $x, y > 0 \rightarrow \lambda_4 = \lambda_5 = 0$
Επίσης $\lambda_1(4-x) = \lambda_1 \cdot (4-3) = 0$ άρα $\lambda_1 = 0$
Άρα έχουμε

$$3 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 3$$
$$2 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad 3\lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

$\rightarrow \lambda_2 = 1/5 \;\; \lambda_3 = 7/5 > 0$ άρα
οι ΚΤ ικανοποιούνται

(γ) $\Delta f = \lambda_1 \Delta \eta_1 + \lambda_2 \Delta \eta_2 = 1/5 \cdot 0{,}1$

$f' = 17 + 0{,}02$

2 (α) Τοπολογική ταξινόμηση

A 3 2 1 4 6 5 7 8 B

$$V(v) = \min_{w \in \Gamma(v)} \{ d_{vw} + V(w) \}$$

$V(B) = 0$ (το αρχικό "κόστος" δεν επηρεάζει)

$V(8) = 2$
$V(7) = \min\{4 + f(B) \; ; \; 1 + f(8)\} = 3$
$V(5) = \min\{\underline{3 + f(B)} \; ; \; 1 + f(7) \; ; \; 3 + f(8)\} = 3$
$V(6) = \min\{2 + V(5) \; , \; 4 + V(8)\} = 5$
$V(4) = \min\{\underline{1 + V(5)} \; ; \; 2 + V(7)\} = 4$
$V(1) = \min\{\overline{3 + V(4)} \; , \; 6 + f(B)\} = 6$
$V(2) = \min\{0 + V(1) \; , \; \overline{1 + V(4)} \; ; \; 7 + V(7)\} = 5$
$V(3) = \min\{\underline{-1 + V(2)} \; ; \; 4 + V(7) \; ; \; 3 + V(8) \; ;$
$3 + V(6)\} = 4$
$V(A) = \min\{1 + V(1) \; ; \; 3 + V(2) \; ; \; 2 + V(3)\}$
$= 6$

$A \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow B$

(β) Πρέπει $Cx \cong \begin{pmatrix} R_1 - \rho \\ R_2 - \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Αν $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Cx = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Άρα η υπόδειξη επιβεβαιώνεται

Το χαρτοφυλάκιο αγοράς έχει απόδοση $\frac{2}{3}10 + \frac{1}{3}15 = 35/3 = 11\,2/3$

Πρέπει

$5x_0 + (1-x_0)\,11\tfrac{2}{3} = 30$

ή $15x_0 + (1-x_0)35 = 90$

ή $-20x_0 = 55$

$x_0 = -55/20$

$x_1 = \left(1+\frac{55}{20}\right)\frac{2}{3}$

$x_2 = \left(1+\frac{55}{20}\right)\frac{1}{3}$

3 (α) Για τον Ι $EOQ_1 = \sqrt{\frac{2K_1D}{S}} = \sqrt{200^2} = 200$

μέσο κόστος $\sqrt{2KDS} + pD = 200 + 3 \cdot 200 = 800$ €/μήνα

Για τον ΙΙ $EOQ_2 = \sqrt{\frac{2K_2D}{S}} = 100\sqrt{6} \cong 245$

μέσο κόστος $\sqrt{2K_2DS} + p_2D = \sqrt{300 \cdot 200} + 500 = 745$

Προτιμάται ο ΙΙ

3(i) $\min \; KD/Q + pD + SQ/2$

$0 \leq Q \leq M$

$$\mathcal{L} = -\frac{KD}{Q} - pD - SQ/2 + \lambda Q + \mu(M-Q)$$

$$\partial \mathcal{L}/\partial Q = +\frac{KD}{Q^2} - \frac{S}{2} + (\lambda - \mu) = 0$$

• Αν $0<Q<M$ τότε $\lambda=\mu=0$ και οι ΚΤ ικανοποιούνται με $Q = \sqrt{\frac{2KS}{D}}$, που ισχύει μόνο εφόσον

$Q<M$ ή $Q \leq \sqrt{\frac{2KS}{D}}$.

• Αν δεν ισχύει η σχέση, τότε για λύση $Q=M$ ικανοποιούνται $\lambda=0$, $\mu \geq 0$ και εφόσον

$\partial \mathcal{L}/\partial Q = 0 \rightarrow +\frac{KD}{M^2} - \frac{S}{2} = \mu$

Για να είναι $\mu>0$ θα πρέπει $\frac{KD}{M^2} > S/2$

ή $\left(\frac{2KD}{S}\right)^{1/2} > M$, που ισχύει, άρα ικανοποιούνται τα ΚΤ.

(γ) Εφόσον $M=100$ και $Q_1, Q_2 > 100$

Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας είναι $Q=100$ με κόστος για τον I

$$\frac{100 \cdot 200}{100} + 3 \cdot 200 + \frac{100}{2} = 850$$

Για τον II

$$\frac{150 \cdot 200}{100} + 2{,}5 \cdot 200 + \frac{100}{2}$$

$$= 300 + 500 + 50 = 850$$

Άρα είναι αδιάφοροι στην επιλογή

4(β) Ομογενής: ΧΘ

$$s^2 - 2s - 8 = 0$$

$$(s-4)(s+2) = 0 \quad \rho_1 = -2, \quad \rho_2 = 4$$

$$x_n^{OM} = P4^n + Q(-2)^n$$

Ειδική $x_n^E = An + B$. Αντικαθιστούμε

$$\underbrace{(An+B)}_{x_n} = 2\underbrace{(An - A + B)}_{x_{n-1}} + 8\underbrace{(An - 2A + B)}_{x_{n-2}} + n + 2$$

$$n\underbrace{(A - 2A - 8A - 1)}_{0} + (\underbrace{B + 2(A-B) + 8(2A-B)}_{0} - 2) = 0$$

$$-9A - 1 = 0 \quad A = -1/9$$

$$(-9B + 18A - 2)$$

$$B = -4/9$$

Άρα $x_n = P4^n + Q(-2)^n - \frac{n}{9} - \frac{4}{9}$

$$x_0 = P + Q - 4/9 = 0 \qquad P+Q = 4/9$$

$$x_1 = 4P - 2Q - 5/9 = 0 \qquad 4P - 2Q = 5/9$$

$$6P = 13/9 \quad P = 13/54$$

$$Q = \frac{24}{54} - \frac{13}{54} = \frac{11}{54}$$

4(a) $V_{1,\dots,k+1}(M) = \max\{a_{k+1} + V_{1..k}(M - b_{k+1}) ; V_{1,\dots,k}(M)\}$

Επίλυση

Αντικείμενα

Δείκτης	1	2	3	4
Αξία	2	3	5	8
Βάρος	3	4	6	7

Συναρτήσεις Αξίας - Δυναμικού Προγραμμ

Αντικείμενα

Χωρητικότητα	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	2	2	2	2
4	2	3	3	3
5	2	3	3	3
6	2	3	5	5
7	2	5	5	8
8	2	5	5	8
9	2	5	7	8
10	2	5	8	10
	V_1	$V_{1,2}$	$V_{1,2,3}$	$V_{1,2,3,4}$

Χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός του $V_{1,2,3,4}(10) = \max\{8 + V_{1,2,3}(3) ; V_{1,2,3}(10)\}$

$= \max\{8+2 ; 8\} = 10$

5 $L = x + 3y + \lambda(4 - x^2 - 2y^2) + \mu(y-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0$ (1)

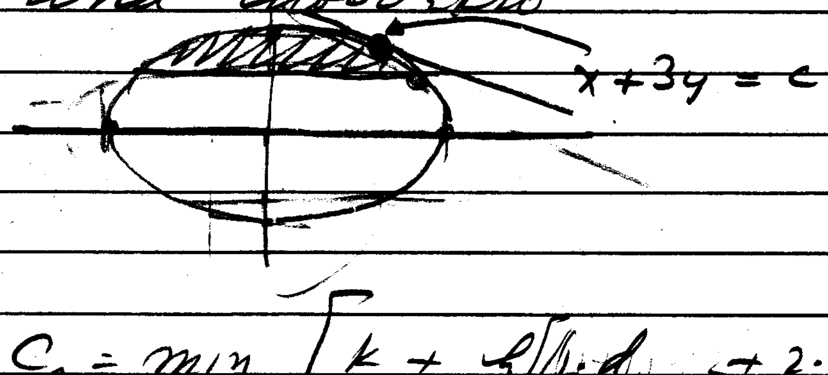
$\frac{\partial L}{\partial y} = 3 - 4\lambda y + \mu = 0$ (2)

Από την (1) $\lambda > 0$, και $x^2 + 2y^2 = 4$
έχουμε $x = 1/2\lambda > 0$

Αν $\mu \geq 0$ προέρχεται $y = 1$ οπότε $x^2 + 2 = 4$
ή $x = +\sqrt{2}$ και $\lambda = 1/2x = 1/2\sqrt{2}$. Οπότε
η (2) γίνεται $\mu = 4\lambda y - 3 =$
$= \frac{4}{2\sqrt{2}} - 3$ δεν είναι αρνητικό!
άρα απορρίπτεται

Αν $\mu = 0$ $y = 3/4\lambda > 0$ και
$x^2 + 2y^2 = 4 = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2 \cdot 9}{16\lambda^2}$
ή $4 = \frac{22}{16\lambda^2}$ ή $\lambda^2 = \frac{22}{4 \cdot 16}$, $\lambda = +\sqrt{\frac{22}{4 \cdot 16}}$

δεν είναι αποδεκτό



(6) $C_j = \min_z \left[k + d[1 \cdot d_{j+1} + 2 \cdot d_{j+2} + \ldots + z\, d_{j+z}] + C_{j+z+1} \right]$

$C_5 = 0$ $C_4 = 10$ $C_3 = \min\{10+10; 10+6\} = 16$

$C_2 = \min\{\underset{26}{10 + C_3}; \underset{22}{10 + 2 + C_4}; \underset{24}{10 + 2 + 12}\} = 22$

$C_1 = \min\{10 + C_2 ; 10 + 1 + C_3 ; 10 + 1 + 4 + C_4 ;$ (32) (16) 15 + 10
$10 + 1 + 4 + 18\} = 25$

Παραγωγή πιο 2 $d_1 + \overset{8}{d_2} + d_3$, πιο κ $\overset{6}{d_4}$
Άρα δεν είναι επιτρεπτό αν η παραγωγή είναι έως 6!

Τότε η σχέση ΔΠ γίνεται

$$V_n(s) = \max_{\substack{0 \le Q \le 6 \\ s+Q \ge d_n}} \left\{ \begin{matrix} K & Q>0 \\ 0 & Q=0 \end{matrix} + h(s+Q-d_n) + V_{n-1}(s+Q-d_n) \right\}$$

Πιο δύσκολη καθώς η αξία $V_n(s)$ εξαρτάται από το επίπεδο του αποθέματος.