Επιχειρησιακή Έρευνα - Τελική Εξέταση - Φεβρουάριος 2010
Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5^o ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Το 6^o θέμα είναι από την προαιρετική ύλη. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα.

Θέμα 1.
Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\, f(x, y, z, w) = 3x+2y+4z+2w$$

με περιορισμούς

$$2x - 2y + 3z + 4w \le 12$$
$$x + y + 3z + w \le 16$$
$$x, y, z, w \ge 0$$

(α 60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex
(β 30%) Επιβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) επιβεβαιώνει τις συνθήκες Kuhn Tucker
(γ 10%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βελτίστου αν οι περιορισμοί γίνουν

$$2x - 2y + 3z + 4w \le 12,1$$
$$x + y + 3z + w \le 16$$
$$x, y, z, w \ge 0$$

Θέμα 2
Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μία πρώτη ύλη και βέβαια εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Η ανά εβδομάδα διαθέσιμη εργασία είναι 2000 εργατοώρες, η δε αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

	Κέρδος/τεμάχιο	Εργατοώρες ανά τεμάχιο	Όγκος τεμαχίου σε κυβικά
Α	4	2	3
Β	3	6	2
Γ	5	8	4

(α) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης και λύστε το αρχίζοντας την simplex από μία βασική λύση που περιλαμβάνει τα προϊόντα Α,Β αλλά όχι το Γ.
(β) Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να νοικιάσουμε επιπλέον κυβικά αποθήκης με κόστος 1 € ανά κυβικό την εβδομάδα. Λύστε το πρόβλημα
Υπόδειξη: Αρχίστε από μία αρχική βασική λύση που περιλαμβάνει ΜΟΝΟ το προϊόν Α – και επιπρόσθετη χωρητικότητα αποθήκης.

Θέμα 3
(α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = 5x^2+2y^2+2xy-12x-6y+15$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε. Με αρχικό σημείο το (0,0) εκτελέστε δύο βήματα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας. και εκτιμείστε πόσο πλησίασε η μέθοδος στο βέλτιστο.
(β) Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία, το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 10%, τυπική απόκλιση 15% ενώ το δεύτερο 15% και 20% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων -0,5. Επίσης υπάρχει ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 5%. Αν ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση επί του κεφαλαίου του τουλάχιστον 10% ποιό χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να σχηματίσει;

Θέμα 4
(α) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 2400 τεμάχια/έτος χωρίς να είναι επιτρεπτές καθυστερήσεις. Σε κάθε παραγγελία χρεώνεται ένα πάγιο 200 € συν 2 € ανά τεμάχιο για ποσότητες παραγγελίας έως 400 τεμάχια, ενώ δεν υπάρχει επιβάρυνση για τα τεμάχια άνω

των 400. Το κόστος αποθήκευσης είναι 1 € ανά μήνα και τεμάχιο. Ποια η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας;
(β) Ένας φοιτητής διαθέτει 12 ημέρες για να μελετήσει 3 μαθήματα, στα οποία πρέπει απαραιτήτως να επιτύχει. Ταυτόχρονα θέλει να μεγιστοποιήσει τον μέσο όρο της βαθμολογίας του. Θεωρεί ότι ο παρακάτω πίνακας περιγράφει την βαθμολογία του στα μαθήματα ανάλογα με τον αριθμό ημερών που θα διαθέσει για το καθένα. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό βρέστε την βέλτιστη κατανομή ημερών μελέτης στα μαθήματα;

Ημέρες μελέτης	Μάθημα Α	Μάθημα Β	Μάθημα Γ
1	2	2	1
2	5	3	3
3	5	5	5
4	6	5	6
5	7	6	7
6	8	6	8
7	9	8	8
8	10	10	9

Θέμα 5
(α) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$\text{Min } x+3y$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x^2 + 2y^2 \le 4$$
$$y \ge 0$$

(β) Μία εταιρεία έχει κόστος προμήθειας μίας πρώτης ύλης που δίνεται από την συνάρτηση

$$K(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 10+2q & \text{αν } q>0 \end{cases}$$

Θέλει να κάνει προγραμματισμό 4 περιόδων j =1, 2, 3, 4 (τώρα βρίσκεται στην περίοδο 1) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος προμηθειών - αποθήκευσης. Θεωρεί ότι η ζήτηση στις επόμενες περιόδους είναι $d_1=1$, $d_2=2$ $d_3=4$ $d_4=3$ και δεν επιτρέπεται καθυστέρηση, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 1 €/μονάδα - περίοδο.
(ι-20%) Διατυπώστε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (ιι-30%) Λύστε την και προσδιορίστε έτσι την βέλτιστη ποσότητα παραγωγης την $1^η$ περίοδο.
Θέμα 6^ο
(α) Ένα κατάστημα ενός εποχιακού είδους (πχ. Χριστουγεννιάτικα είδη) πωλεί με κέρδος 120% επί της τιμής αγοράς. Τα αντικείμενα που δεν θα πωληθούν μέχρι και την παραμονή των Χριστουγέννων έχουν κόστος καταστροφής 20% της τιμής αγοράς των. Τυχόν μη ικανοποιηθείσα ζήτηση δεν ενδιαφέρει τον επιχειρηματία. Αν η ζήτηση που προβλέπεται έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 200 και 500 τεμαχίων, ποια ποσότητα θα παραγγείλει ο επιχειρηματίας έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο συνολικό του κέρδος;
(β) Έστω η ακολουθία των αριθμών 1,1,2,1,3,0,5,... Δώστε ένα αναλυτικό τύπο για τον n-στο της όρο.
Υπόδειξη: Ο κάθε όρος προκύπτει σαν συνάρτηση των δύο προηγουμένων του συν κάποια σταθερά.

Θέμα 1

(α)

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ 12/4 \leftarrow \\ 16/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -\frac{14}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc} 1/3 & 14/3 & 0 & -10/3 & -4/3 & 0 & -16 \\ 2/3 & -2/3 & 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -\frac{17}{4} \\ \\ \frac{3}{4} \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc} 17/9 & 0 & 0 & 4/3 & 2/9 & -14/9 & -200/9 \\ 4/9 & 0 & 1 & 2/3 & 1/9 & 2/9 & 44/9 \\ -1/3 & 1 & 0 & -1 & -1/3 & 1/3 & 4/3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & -17/4 & -3/2 & -1/4 & -5/2 & -43 \\ 1 & 0 & 9/4 & 3/2 & 1/4 & 1/2 & 11 \\ 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 5 \end{array}\right]$$

$x = 11 \quad y = 5 \quad z = w = 0$

(β) $\mathcal{L} = 3x + 2y + 4z + 2w +$
$+ \lambda(12 - 2x + 2y - 3z - 4w) +$
$+ \mu(16 - x - y - 3z - w) + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 w$

$$\partial \mathcal{L}/\partial x = 3 - 2\lambda - \mu + \nu_1 = 0 \quad (1)$$
$$\partial \mathcal{L}/\partial y = 2 + 2\lambda - \mu + \nu_2 = 0 \quad (2)$$
$$\partial \mathcal{L}/\partial z = 4 - 3\lambda - 3\mu + \nu_3 = 0 \quad (3)$$
$$\partial \mathcal{L}/\partial w = 2 - 4\lambda - \mu + \nu_4 = 0 \quad (4)$$

Για την δεδομένη λύση, $\nu_1 = \nu_2 = 0$
οπότε λύνοντας τις (1), (2)

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda+\mu=3 \\ 2\lambda-\mu=-2 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \lambda = 1/4 \\ \mu = 5/2 \end{array}$$

που είναι αποδεκτά. Επιπλέον αντικαθιστώντας στις (3),(4) έχουμε

$v_3 = 3(\lambda+\mu)-4 = 3\,\frac{11}{4}-4 = \frac{33-16}{4} = \frac{17}{4} > 0$

$v_4 = 4\lambda+\mu-2 = \frac{7}{2}-\frac{4}{2} = 3/2 > 0$

που είναι επίσης αποδεκτό. Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες

(γ) $\Delta F = -\lambda \Delta g_1 - \mu \Delta g_2$

ο αρχικός περιορισμός είναι

$g_1 = 12-2x+2y-3z-4w \ge 0$

αντί ο νέος

$\hat{g}_1 = 12,1-2x+2y-3z-4w \ge 0$

$12-2x+2y-3z-4w \ge -0,1$

άρα $\Delta g_1 = -0,1$. Έτσι

$\Delta F = -\frac{(-0,1)}{4} = 0,025$

και $F_{\nu\epsilon o} = F_{\pi\alpha\lambda\alpha\iota o} + \Delta F = 43,025$

2(α) $\max\ 4x+3y+5z$

2(β) $2x+6y+8z \le 2000$

$3x+2y+4z \le 1000$

$x, y, z \ge 0$ (αγνοούμε ακεραιότητα)

Σύμφωνα με την υπόδειξη, εφαρμόζουμε μόνο τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{c} 1/2 \\ -3/2 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 6 & 8 & 1 & 0 & 2000 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} 3/7 \\ -1/7 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 1/2 & 0 & 1000 \\ 0 & -7 & -8 & -3/2 & 1 & -2000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 4/7 & -1/7 & 3/7 & 1000/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & 3/14 & -1/7 & 2000/7 \end{array}\right]$$

επεξεργαζόμαστε την πρώτη γραμμή:

$$\begin{array}{c c} & \\ -3 \quad -1 & \\ & \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4/7 & -1/7 & 3/7 & \frac{1000}{7} \\ 0 & 1 & 8/7 & 3/14 & -1/7 & \frac{2000}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5/7 & -1/14 & -9/7 & -10.000/7 \\ 1 & 0 & 4/7 & -1/7 & 3/7 & 1000/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & 3/14 & -1/7 & 2000/7 \end{bmatrix}$$

Άρα η υποδεικνυόμενη λύση $x = 1000/7$ $y = 2000/7$ είναι βέλτιστη εφόσον οι συντελεστές είναι αρνητικοί στην αντικειμενική

(β) $\max \quad 4x + 3y + 5z - w$

$$2x + 6y + 8z \leq 2000$$
$$3x + 2y + 4z - w \leq 1000$$
$$x, y, z, w \geq 0$$

Εξετάζουμε λύση με $x, w > 0$ $y, z = 0$

Τότε $x = 1000$ $w = 2000$

και ο πίνακας simplex αρχικό είναι

$$\begin{array}{c} \\ \\ -3/2 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ *-1 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1/2 & 0 & 1000 \\ 0 & -7 & -8 & -1 & -3/2 & 1 & -2000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -4 \\ +1 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1/2 & 0 & 1000 \\ 0 & 7 & 8 & 1 & 3/2 & -1 & 2000 \end{bmatrix}$$

Η $1^η$ γραμμή γίνεται

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 & -1/2 & -1 & -2000 \end{array}\right]$$

που δείχνει ότι η λύση είναι αντίως βέλτιστη. Παρατηρούμε ότι το κέρδος εδώ είναι 2000 ενώ προηγουμένως ήταν $10.000/7 \cong 1.427$ δηλαδή λιγότερο.

3 (α) $\nabla f = (10x + 2y - 12, 4y + 2x - 6)$

και $\nabla f(0,0) = (-12, -6) = -6(2,1)$

Το $1^ο$ βήμα είναι να επιλέξουμε t ώστε $\min_t f(2t, t)$. Το t βρίσκεται

θέτοντας $df/dt = 0$. Αλλά $df/dt = \nabla f \cdot (2,1)$

$= 20x + 4y - 24 + 4y + 2x - 6 =$ (για $x = 2t$ $y = t$)

$= 40t + 4t - 24 + 4t + 4t - 6$

$= 52t - 30 = 0$ ή $t = 15/26$

οπότε $(x_1, y_1) = (30/26, 15/26)$

Στο (x_1, y_1), $\nabla f = \left(\frac{330}{26} - 12, \frac{60+60}{26} - 6\right)$

$= \left(\frac{18}{26}, -\frac{36}{26}\right) = \frac{18}{26}(1, -2)$

(που είναι κάθετο στο $(2,1)$!)

Έτσι το επόμενο σημείο είναι της μορφής $(x_2, y_2) = \left(\frac{30}{26}, \frac{15}{26}\right) + t(1, -2)$

οπότε λύνουμε το πρόβλημα

$$\min_t f\left(\frac{30}{26} + t, \frac{15}{26} - 2t\right)$$

Το βέλτιστο είναι το $x = y = 1$ (θέτουμε $\nabla f = 0$) και το $1^ο$ βήμα δεν έχει πλησιάσει σημαντικά.

(3β) Το χαρτοφυλάκιο των αβέβαιων βρίσκεται λύνοντας το σύστημα

$$\frac{1}{100^2}\begin{pmatrix} 15^2 & -\frac{15\cdot 20}{2} \\ -\frac{15\cdot 20}{2} & 20^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{5}-1 \\ \frac{15}{5}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{5^2}{100^2}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Τα $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ είναι ανάλογα με τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 9x - 6y = 1 \\ -6x + 16y = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x = 7/27 \\ y = 6/27 \end{matrix}$$

οπότε τα αβέβαια κατανέμονται κατά $\pi_1 = 7/13$ $\pi_2 = 6/13$, οπότε αν δοθούν x_0 στο βέβαιο, δίδονται $1-x_0$ στα αβέβαια, οπότε πρέπει να ισχύει για τις αποδόσεις

$$5x_0 + (1-x_0)\left(10\frac{7}{13} + 15\frac{6}{13}\right) = 10$$

ή $$65x_0 + 160(1-x_0) = 130$$

ή $$x_0 = 3\cancel{0}^{6}/\cancel{95}_{19} = 6/19$$

και $$x_1 = \frac{7}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{65}^{\cancel{5}\,1}}{\cancel{95}_{19}} = 7/19$$

$$x_2 = \frac{6}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{65}^{\cancel{5}\,1}}{\cancel{95}_{19}} = 6/19$$

Παρατηρούμε ότι η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι πολύ μικρότερη του 15%.

4. $D = 2.400$ €/έτος $\quad K = 200 \quad p = 2$ €/τεμ

$h = 1$ € /μην-τεμ $= 12$ €/έτος-τεμ

Για Q έως 400 τεμ $p = 2$ €/τεμ, ενώ για παραπάνω δεν υπάρχει επιβ, δηλαδή

$K' = 200 + 400 \cdot 2 = 1000$

Για "μικρές παραγγελίες" $EOQ_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 2.400}{12}}$
$= 200\sqrt{2} = 282,8$

και μέσο κόστος $\frac{KD}{Q} + h\frac{Q}{2} + pD = 8.195$ €/έτος
$= 682,9$ €/μήνα

Για μεγάλες παραγγελίες
$EOQ' = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 2400}{12}} = 200\sqrt{10} = 632,45$ τεμ.

με κόστος $\frac{K'D}{Q'} + h\frac{Q'}{2} = 7.589$ €/έτος $= 632,42$ €/μήνα

που είναι καλύτερο.

(δ) Το σχέδιο με μόνο το μάθημα A αντιστοιχεί στην 1η στήλη. Με μαθήματα A, B ο υπολογισμός είναι

$f_{AB}(x) = -\infty$ για $x < 5$

$f_{AB}(5) = 10$

$f_{AB}(6) = \max\{\underset{3 \text{ στο } B}{5 + f_A(3)}\ ;\ \underset{4 \text{ στο } B}{5 + f_A(2)}\} = 10$

$f_{AB}(7) = \max\{\underset{3 \text{ στο } B}{5 + f_A(4)}\ ;\ \underset{4 \text{ στο } B}{5 + f_A(3)}\ ;\ \underset{5 \text{ στο } B}{6 + f_A(2)}\} = 11$

$f_{AB}(8) = \max\{\underset{3}{5 + f_A(5)}\ ;\ \underset{4}{5 + f_A(4)}\ ;\ \underset{5}{6 + f_A(3)}\ ;\ \underset{6}{6 + f_A(2)}\}$
$= 12$

$f_{AB}(9) = \max\{\underset{3}{5 + f_A(6)}\ ;\ \underset{4}{5 + f_A(5)}\ ;\ \underset{5}{6 + f_A(4)}\ ;\ \underset{6}{6 + f_A(3)}\ ;\ \underset{7}{8 + f_A(3)}\}$
$= 13$

$f_{ABΓ}(12) = \max\{\underset{3 \text{ στο } Γ}{5 + f_{AB}(9)}\ ;\ \underset{4 \text{ στο } Γ}{6 + f_{AB}(8)}\ ;\ \underset{5}{7 + f_{AB}(7)}\ ;$
$\underset{6}{8 + f_{AB}(6)}\ ;\ \underset{7}{8 + f_{AB}(5)}\ ;\ \underset{8}{9 + f_{AB}(4)}\} = 18$

5 (α) $\mathcal{L} = -x - 3y + \lambda(4 - x^2 - 2y^2) + \mu y$

$\partial\mathcal{L}/\partial x = -1 - 2\lambda x = 0$ (1)
$\partial\mathcal{L}/\partial y = -3 - 4\lambda y + \mu = 0$ (2)
και $\lambda(4 - x^2 - 2y^2) = 0$ (3) $\mu y = 0$ (4)
Από την (1) προκύπτει ότι $\lambda \neq 0$ ($\lambda > 0$)
άρα από την (3) $4 = x^2 + 2y^2$
Αν $\mu = 0$ πρέπει $4\lambda y = -3$ ή
$y < 0$ εφόσον $\lambda > 0$, αλλά όμως
πρέπει $y \geq 0$. Έτσι πρέπει και $\mu > 0$
ή $y = 0$. Άρα $4 = x^2$ ή $x = \pm 2$
έχουμε από την (1) $2\lambda x = -1$, το
x πρέπει να είναι αρνητικό άρα $x = -2$.

(β) $C_k = \min_q \{K + (d_{k+1} + 2d_{k+2} \cdots)h + C_{k+q+1}\}$
το 2q αγνοείται..

$C_4 = 10$ ($= 10 + 2\cdot 3 = 16$ αν ληφθεί υπόψη το 2q)
$C_3 = \min\{10 + 3, 10 + 10\} = 13$
($= 27$ αν ληφθεί υπόψη το 2q)
$C_2 = \min\{\underbrace{10 + 4 + 2\cdot 3}_{\text{περίοδοι } 2,3,4}, \underbrace{10 + 4 + 10}_{\text{περίοδος } 2,3}, \underbrace{10 + 13}_{\text{περίοδος } 2}\} = 20$ ($= 38$ με το 2q)

$C_1 = \min\{\overset{29}{\underbrace{10 + 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3}_{\text{περίοδοι } 1,2,3,4}}; \overset{25}{\underbrace{10 + 2 + 13}_{\text{περίοδοι } 1,2}};$

$\overset{32}{10 + 2 + 20}; \overset{30}{10 + 20}\} = 25$ (45 με το 2q)

Άρα την πρώτη περίοδο καλύπτουμε 3 μονάδες και την 3η περίοδο 7 μονάδες

6. (α) $F(D \le Q) = \dfrac{p - c + m}{p + h - m} =$

$p = 1{,}2c + c = 2{,}2c \quad p - c = 1{,}2c$
$h = 0{,}2c \quad m = 0 \quad$ οπότε
$F(D \le Q) = \dfrac{1{,}2}{2{,}4} = \dfrac{1}{2}$ Άρα

$Q = 200 + 300/2 = 350$

(β) Πρέπει $x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n + \gamma$
Για να βρούμε τους συντελεστές λύνουμε
$2 = \alpha + \beta + \gamma$
$1 = 2\alpha + \beta + \gamma$
$3 = \alpha + 2\beta + \gamma$
από όπου προκύπτει $\alpha = -1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 2$
Όπως $0 = -3 + 1 + 2$
$5 = -0 + 3 + 2$
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι
$s^2 = -s + 1 \quad$ ή $\quad s^2 + s - 1 = 0$
με ρίζες $\rho_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

Η ειδική λύση της
$x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n + 2$
έστω ότι είναι σταθερά A, οπότε
$A = -A + A + 2 \longrightarrow A = 2$
Έτσι η γενική λύση είναι
$x_n = P\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + Q\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2$

Τα P, Q είναι έτσι ώστε
$1 = P + Q + 2$
$1 = P\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + Q\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2$