Επιχειρησιακή Έρευνα - Επαναληπτική Εξέταση - Σεπτέμβριος 2013

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε περισσότερα, το 5^o κατά σειρά ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα εφόσον αποχωρήσετε στο τέλος της εξέτασης.

Θέμα 1

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\ \ 4x+3y+6z$$

με περιορισμούς

$$3x+y+3z \leq 30$$
$$2x+2y+3z \leq 40$$
$$x, y, z \geq 0$$

(α 60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

(β 20%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker

(γ 20%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βέλτιστου αν στο παραπάνω πρόβλημα απαιτηθεί να ισχύει $y \geq 0,1$ (τα άλλα στοιχεία του προβλήματος δεν μεταβάλλονται)

Θέμα 2

[redacted]Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μόνο εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Η ανά εβδομάδα διαθέσιμη εργασία είναι 2000 εργατοώρες, η δε αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

	Κέρδος/τεμάχιο	*Εργατοώρες ανά τεμάχιο*	*Όγκος τεμαχίου σε κυβικά*
Α	*4*	*2*	*3*
Β	*3*	*6*	*2*
Γ	5	8	4

(α) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης την εβδομάδα (β) Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να νοικιάσουμε επιπλέον κυβικά αποθήκης με κόστος 1 € ανά κυβικό την εβδομάδα (γ) Αν για κάθε προϊόν υπάρχει ένα πάγιο κόστος «εκκίνησης» της παραγωγής του πχ. 5000 μονάδων (ανεξαρτήτως του επιπέδου παραγωγής), πώς θα διαμορφώνατε το πρόβλημα;

Θέμα 3

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2+2y^2+xy$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε. (ι 10%) Εντοπίστε το ελάχιστο (ιι 40%) Με αρχικό σημείο το (1,-1) εκτελέστε τρία βήματα της μεθόδου αναζήτησης συντεταγμένων (δείξτε απλώς πως θα γίνει το 3^o βήμα) και σχολιάστε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

(β) Μία εταιρεία εισαγωγής αυτοκινήτων διαθέτει 12 αυτοκίνητα μιάς μάρκας. Το καθένα θα εκτεθεί σε μία από τρείς εκθέσεις αυτοκινήτων στις περιοχές Α, Β, Γ. Αν ένα αυτοκίνητο εκτεθεί σε κάποια έκθεση δεν μπορεί να μετακινηθεί σε άλλη. Τα κέρδη που θα προκύψουν αν στην κάθε έκθεση διατεθεί ένας αριθμός αυτοκινήτων δίνεται στον παρακάτω πίνακα. <u>Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό</u> υπολογίστε την καλύτερη κατανομή αυτοκινήτων σε εκθέσεις. Γράψτε οπωσδήποτε την εξίσωση δυναμικου προγραμματισμού για το πρόβλημα αυτό.

Αριθμός αυτοκινήτων	*Έκθεση Α*	*Έκθεση Β*	*Έκθεση Γ*
1	*2*	*3*	*3*
2	*3*	*3*	*3*
3	*5*	*6*	*5*
4	*6*	*6*	*6*
5	*7*	*8*	*7*
6	*8*	*8*	*8*
7	*10*	*8*	*11*
8 ή περισσότερα	*13*	*10*	*13*

(παρατήρηση: ΔΕΝ ενδιαφέρει να μαντέψετε την σωστή λύση!)

Θέμα 4

(α) Έστω το πρόβλημα

$max\ x^2+2y+3z^4$

με περιορισμούς

$x+y+z \leq 4$

$2x-3y+3z \leq 3$

$3x+4y \leq 7$ $x, y, z \geq 0$

Εξετάστε αν οι τιμές x=0, y=3/2, z=5/2 αποτελούν λύση του προβλήματος

(β) Λύστε το εξής πρόβλημα

$max\ x+2y$

με περιορισμούς

$x+y \leq 3$

$3x+y \geq 6$

$x, y \geq 0$

Θέμα 5

(α) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 6000 τεμάχια/έτος χωρίς να είναι επιτρεπτές καθυστερήσεις. Σε κάθε παραγγελία χρεώνεται ένα πάγιο 500 € συν 2 € ανά τεμάχιο για ποσότητες παραγγελίας έως 600 τεμάχια, ενώ για τα τεμάχια άνω των 600 η επιβάρυνση είναι 1 € ανά τεμάχιο. Το κόστος αποθήκευσης είναι 2 € ανά μήνα και τεμάχιο. Ποια η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας;

(β) Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\max \sum_{i=1}^{1000} a_i x_i^2$$

Με περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{1000} b_i x_i \leq b \text{ και } \sum_{i=1}^{1000} c_i / x_i \leq c$$

$$x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, \ldots, 1000$$

Οι παράμετροι του προβλήματος a_i, b_i, c_i έχουν εγγραφεί σε ένα φύλλο λογισμικού στις θέσεις A1:A1000, B1:B1000, C1:C1000, ενώ τα b, c στις θέσεις D1,D2 αντίστοιχα

Διατυπώστε το πρόβλημα σε Solver κάνοντας «λίγες» πληκτρολογήσεις. Συγκεκριμένα διαμορφώστε το σχετικό φύλλο λογισμικού και συμπληρώστε το «παράθυρο διαλόγου» του Solver.

1.
$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & \downarrow & & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 30/3 \leftarrow \\ 40/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -60 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right]
\end{array}$$

$(-1/3)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -70 \\ 4/3 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 20/3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$x = 0 \quad y = 10 \quad z = 20/3$

$$\mathcal{L} = 4x + 3y + 6z + \lambda_1(30 - 3x - y - 3z) + \lambda_2(40 - 2x - 2y - 2z) + \lambda_3 x + \lambda_4 y + \lambda_5 z$$

Οι ανισότητες ικανοποιούνται ισοτικά άρα $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Επίσης $\lambda_3 \geq 0$ αλλά $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ λόγω συμπληρωματικότητας.

Πρέπει
$$\partial\mathcal{L}/\partial x = 4 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (1)$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial y = 3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \quad (2)$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial z = 6 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_5 = 0 \quad (3)$$

Από τις (2) & (3) έχουμε

$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$

$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 6$ αποδεκτές

Εισάγοντας τα λ από στην (1) έχουμε

$4 - 2.3 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 2$

Άρα οι ΚΤ ικανοποιούνται

Η μεταβολή στην αντικειμενική είναι
$-\lambda_1 \Delta x = 0$ έξοδος $\lambda_1 = 0$.

2. x_A, x_B, x_Γ

(α) $\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma$

$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1000$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0 \quad (\text{ίσως και ακέραιοι})$$

(β) Έστω y τα επιπλέον κιλά αλουμινίου. Το πρόβλημα γίνεται

$$\max \quad 4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - y$$
$$2x_A + 6x_B + 8x_\Gamma \le 2000$$
$$3x_A + 2x_\Gamma + 4x_\Gamma \le 1000 + y$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma, y \ge 0$$

(γ) Έστω $y_A = \begin{cases} 1 & x_A > 0 \\ 0 & x_A = 0 \end{cases}$ κ.ο.κ. y_B, y_Γ

Το καθαρό κέρδος τότε είναι

$$4x_A + 3x_B + 5x_\Gamma - y - 5000(y_A + y_B + y_\Gamma)$$

Εξασφαλίζουμε για να παίρνει το y_A την τιμή 1 όταν $x_A > 0$ θέτουμε

$My_A \ge x_A$ M: μεγάλος αριθμός π.χ. 10^3.

3 (a) Για ελάχιστο $\partial f/\partial x = 2x + y = 0$

$\partial f/\partial y = 4y + x = 0$ με μόνη λύση $x = y = 0$

Αν ξεκινήσουμε την αρχική αναζήτηση κατά το x εξετάζουμε τιμές των x, y της μορφής $(1+t, -1)$ και ελαχιστοπ. την συνάρτηση. Θέτοντας $\cancel{1+t} = \hat{x}$ τότε η συνάρτ. είναι $\hat{x}^2 + 2 - \hat{x}$ με ελάχιστο στο $(1/2, -1)$. Κατόπιν αναζητούμε κατά το y, δηλαδή κατά το $(1/2, -1+t)$ ή $(1/2, \hat{y})$ με αντικειμενική $1/4 + 2\hat{y}^2 + 1/2\,\hat{y}$ όπου το ελάχιστο $\hat{y}$ είναι $\hat{y} = -1/8$ $(4\hat{y} + 1/2 = 0)$ άρα δίνει το $(1/2, -1/8)$. Κατόπιν αναζητούμε πάλι κατά το x ...

(б) Έστω · $F_{1..k}(M)$: Βέλτιστο κέρδος, Μ αποκτήματα (1..k εκδόσεις)

· $f_k(m)$: κέρδος, m αποκτ. από k έκδοση

$$F_{1..k+1}(M) = \max_{0 \le m \le M} \left\{ f_{k+1}(m) + F_{1..k}(M-m) \right\}$$

εκδόσεις ↑ αποκτήματα ↑

M	F_A	$f_B(M)$	$F_{AB}(M)$
1	2	3	max(2,3) = 3
2	3	3	max(3,5) = 5
3	5	6	max($F_A(3)$ = 5, 3 + 2 = $F_A(2)$, 6 + $F_A(0)$) = 6
4	6	6	max{0 + 6; 3 + 5; 3 + 3; 6 + 2; 6 + 0} = 8
5	7	8	max{0 + 7; 3 + 6; 3 + 5; 6 + 3; 8 + 0} = 9
6	8	8	max{0 + 8; 3 + 7; 3 + 6; 6 + 5; 8 + 2} 11
7	10	8	max{0 + 10; 3 + 8; 3 + 7; 6 + 6; 8 + 3} = 12
8	13	10	max{0 + 13; 3 + 10; 6 + 7; 8 + 5; 10} = 13
9	13	10	max{0 + 13; 3 + 13; 6 + 8; 8 + 6; 10 + 2} = 16
10	13	10	max{0 + 13; 3 + 13; 6 + 10; 8 + 7; 10 + 3} = 16
11	13	10	max{0 + 13; 3 + 13; 6 + 13; 8 + 8; 10 + 3} = 19
12	13	10	max{0 + 13; 6 + 13; 8 + 10; 10 + 6} = 19

$F_{AB\Gamma}(12) = \max\{0 + F_{AB}(12);\ 3 + F_{AB}(11);\ 5 + 16;\ 6 + 13;\ 7 + 12;\ 11 + \cancel{F_A(1)} = 10;\ 13 + 8\} = 22$

Απάντηση:

Γ: 1 B: 3 A 8

$f_\Gamma(1) = 3 + f_B(3) = 6 + f_A(8) = 13 \quad = 22$

γ. $L = x^2 + 2y + 3z^4 + \lambda_1(4 - x - y - z) + \lambda_2(3 - 2x + 3y - 3z) + \lambda_3(7 - 3x - 4y) + \lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6 z$

Στο σημείο $x = 0$ $y = 3/2$ $z = 5/2$ οι πρώτοι περιορισμοί ικανοποι. ισότητα, ο τρίτος ανισότητα. Άρα πρέπει $\lambda_3 = 0$ και $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ εφόσον $y, z > 0$.

Οι συνθήκες παραγώγων είναι

$$\partial L/\partial x = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 - \cancel{3\lambda_3} + \lambda_4 = 0 \quad (1)$$

$$\partial L/\partial y = 2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 - \cancel{4\lambda_3} + \cancel{\lambda_5} = 0 \quad (2)$$

$$\partial L/\partial z = 12z^3 - \lambda_1 - 3\lambda_2 - \cancel{4\lambda_3} + \cancel{\lambda_6} = 0 \quad (3)$$

Οι (2) (3) γίνονται

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 12\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{\cancel{12}\cdot 125}{\cancel{8}\;2} = \frac{250}{2}$$

Άρα $\lambda_1 = \frac{254}{4}$ $\lambda_2 = (\lambda_1 + 2)/3 = \frac{262}{12}$

Η (1) τότε δίνει

$$\lambda_4 = -2x + 3\lambda_2 + \lambda_1 = 3\lambda_2 + \lambda_1$$

που είναι βέβαια θετικό

άρα ικανοποιούνται τα ΚΤ.

(ii) Για να βρούμε αρχική β.λ. λύνουμε το βοηθητικό·

$$\min\ z$$

$$x + y + s_1 = 3$$

$$3x + y - s_2 + z = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε την αρχική λύση
Εισάγουμε βάσει την αντικειμενική

$$\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5/2 & -1/2 & 8/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} -2$$

που είναι και βέλτιστη!

5.a. Για $Q \le 600$ $\quad D = 6000/12 = 500$

$$EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{s}} = \sqrt{\frac{2\cdot 500\cdot 500}{2}}$$

$$= 500$$

Για την $Q > 600$ ισοδύναμο K

$$500 + 2\cdot 600 = K + 600$$

$$\rightarrow K = 1100$$

όπως $EOQ' = \sqrt{\frac{2\cdot 500\cdot 1100}{2}} = 500\sqrt{2,2}$

$$\cong 500\cdot 1,5 = 742$$

Τα κόστη είναι

(I) $\sqrt{2KDs} + p_1 D = \overbrace{2\cdot 500}^{1000} + \overbrace{2\cdot 500}^{1000}$

$$= 2000$$

(II) $\sqrt{2K'Ds} + p_2 D = 2\sqrt{500\cdot 1100} + 500$

$$= 1.983$$

↗ λίγο καλύτερο.