$$\begin{matrix} -3/2 \\ -1/2 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccccc} 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & w \\ \boxed{2} & 3 & 4 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} -7/9 \\ 1/3 \\ 2/9 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 7/2 & -4 & -3/2 & 0 & w-18 \\ 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{9/2} & -1 & -1/2 & 1 & 12 \end{array}\right] \quad 6/\tfrac{3}{2} = 4, \quad 2\cdot 12/9 = 8/3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -29/9 & -7/9 & -7/9 & w-82/3 \\ 1 & 0 & 5/3 & 1/6 & -1/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/9 & -1/9 & 2/9 & 24/9 \end{array}\right]$$

$x = 2 \quad y = 24/9 = 8/3 \quad z = 0 \qquad w = 6 + \frac{64}{3} = \frac{18+64}{3} = \frac{82}{3}$

(B) $\mathcal{L} = 3x + 8y + 2z + \lambda_1(12 - 2x - 3y - 4z) + \lambda_2(18 - x - 6y - z)$
$+ \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z$

$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad (x, y > 0)$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = 3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 = 0$

$\partial \mathcal{L}/\partial y = 8 - 3\lambda_1 - 6\lambda_2 + \mu_2 = 0$

Άρα $2\lambda_1 + \lambda_2 = 3$
$3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 8$ $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 9/2 & 7/2 \end{array}\right] \rightarrow \lambda_2 = 7/9 \quad \lambda_1 = 3/2 - \tfrac{1}{2}\cdot 7/9$
$= \tfrac{1}{2}(3 - 7/9)$
$= 20/18 = 10/9$

$\partial \mathcal{L}/\partial z = 2 - 4\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_3 = 0$

$\mu_3 = 4\lambda_1 + \lambda_2 - 2 = \frac{[illegible]}{9} - 2 > 0$

Άρα [illegible]. Αν $\lambda \geq 0, 1$ [illegible] μ_3

2(α) $f(x)$ = ελάχιστη απόσταση $x \to B$

$f(B) = 0$

Η "σειρά επίλυσης" είναι (ανάστροφα)

$B - 7 - 8 - 5 - 6 - 4 - 3 - 1 - 2 - A$

$f(7) = 3$; $f(8) = 4$; $f(5) = \min\{5+f(B), 1+f(7), 3+f(8)\}$
$= 4$

$f(6) = \min\{3+f(5); 4+f(7)\} = 7$

$f(4) = \min\{2+f(5), [illegible]+f(7)\} = 7$; $f(3)$

$f(3) = \min\{7+f(5); 2+f(8); 3+f(4)\} = 10$

$f(1) = \min\{11+f(3); 3+f(4)\} = 10$

$f(2) = \min\{2+f(1), [illegible]+f(6), 10+f(7), 7+f(5), [illegible]+f(3)\} = 11$

$f(A) = \min\{6+f(1), 3+f(2), 6+f(3)\} = 14$

Διαδρομή (υπογραμμισμένη)

$A \to 2 \to 5 \to 7 \to B$

(β) $\mathcal{L} = -x^2 - 2y^2 + \lambda(x+3y-4) + \mu(x-1)$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = -2x + \lambda + \mu = 0$ (1)

$\partial \mathcal{L}/\partial y = -4y + 3\lambda = 0$ (2)

Αν $\lambda, \mu > 0$ είναι $x-1=0$ $x+3y-4=0$

$\to x=1$ $y=1$. Αντικαθιστώντας στην (1), (2)

έχουμε $3\lambda = 4y = 4 \to \lambda = 4/3$ (>0) και

$\lambda+\mu = 2 \to \mu = 2-\lambda = 2/3 > 0$, άρα

επιβεβαιώνονται τα ΚΤ

Αν $\lambda=\mu=0$ είναι $y=x=0$ και δεν

ισχύει ο περιορισμός $x \geq 1$ κλπ. Αν $\lambda=0$, $\mu>0$

είναι από την (2) $y=0$ και από την $\mu>0$

$\to x=1$ που δεν ικανοποιεί την $x+3y \geq 4$

Αν $\lambda>0$ $\mu=0$ κλπ.

3(a) $\partial f/\partial x = 6x - y = 0 \quad \partial f/\partial y = 2y - x = 0$

Άρα το ακρότατο είναι στο $x = y = 0$

(Ο πίνακας δεύτερων παραγώγων είναι θ. ορισμένος)

$Df = (6x-y, 2y-x) \quad Df(-1,-1) = (-5,-1)$ ισχύει

Εξετάζουμε $\frac{d}{dt} f(-1 + \partial f/\partial x\, t, -1 + \partial f/\partial y\, t)$

$= \frac{d}{dt} f(-1-5t, -1-t) = \frac{d}{dt}\left[3(1+5t)^2 + (1+t)^2 - (1+5t)(1+t)\right]$

$= 6 \cdot 5(1+5t) + 2(1+t) - 5(1+t) - (1+5t)$

$= 30 + 150t + 2 + 2t - 5 - 5t - 1 - 5t$

$= 142t + 26 = 0 \quad \rightarrow t = 26/142$

για

(β) Το πρόβλημα κοπής αγροτικού:

c_j: Κόστος μέχρι τώρα με βέλτιστο απόθεμα

$c_j = \min_{k=0,\dots,7-j} \{k + c_{j+k+1} + \ell(d_{j+1} + 2d_{j+2} + \dots + k d_{j+k})\}$

$c_5 = 0$

$c_4 = k = 10$

$c_3 = \min\{10 + c_4 ; 10 + \ell \cdot 4\} = 14$

$c_2 = \min\{10 + c_3 ; 10 + 4 + c_4 ; 10 + 4 + 8 + c_5\} = 22$

4·8+10 $c_1 = \min\{10 + c_2, 10 + 4 + c_3, 10 + 12 + c_4 + 10 + 24 + c_5\} =$

$= \min\{32 ; 10+4+14 ; 22+10 ; 34\} = 28$

Με μικρότερο κόστος το βέλτιστο είναι η παραγωγή όλης της ποσότητας στην αρχή;

$c_4 = 10 \quad c_3 = 12 \quad c_2 = \min\{10+12, 10+2+10 ; 10+2+4\} = 16$

$c_1 = \min\{10+16, 10+2+12 ; 10+2+4+10, 10+2+4+6\}$

$= 22$

1a $\mathcal{L} = 3x^2 + x^4y^6 + y^8 + z^2x^2 + z^4$
$+ \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2-z^2)$

Για τις διαδοχικές τιμές των x, y, z οι περιορισμοί ικανοποιούνται. Οι συνθήκες Lagrange είναι

$\partial\mathcal{L}/\partial x = 6x + 4x^3y^6 + 2xz^2 + \lambda + 2\mu x = 0$

$\partial\mathcal{L}/\partial y = 6y^5x^4 + 8y^7 + \lambda + 2\mu y = 0$

$\partial\mathcal{L}/\partial z = 2zx^2 + 4z^3 + \lambda - 2\mu z = 0$

(β) Η ομογενής $x_n = -x_{n-1}$ έχει λύση
$x_n^{ομ} = (-1)^n A$

Δοκιμάζουμε $x_n^{(1)} = an^2 + bn + c$ οπότε πρέπει

$an^2+bn+c = -(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + n^2 + 2$

$an^2 + bn + c = -an^2 + 2an - a - bn + b - c + n^2 + 2$

Γράφουμε την σχέση ως προς n

$n^2(a+a-1) + n(2b-2a) + a + 2c - 2 = 0$

Όλοι οι συντελεστές των n και n σταθερά πρέπει να μηδενίζονται. Οπότε είναι $2a-1=0$ $(n^2) \to a = 1/2$

$2b-2a=0$ $(n) \to b = a = 1/2$ και $2c = 2 - a = 3/2$, $c = 3/4$

Άρα η γενική λύση είναι $x_n = (-1)^n A + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$

Για $n=0$ είναι $x_0 = 0$ οπότε $x_0 = 0 = A + 3/4$

$\Rightarrow A = -3/4$ και άρα

$x_n = -\frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 3/4$