Επιχ. Έρευνα 1

Εξέταση Ιουνίου - Πρόχειρες Λύσεις

1. (α)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ -1 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2/3 \\ \\ \\ -1/3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -7/3 & -2/3 & 0 & -44/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 13/3 \\ 0 & 0 & -5/3 & -1/3 & 1 & 20/3 \end{bmatrix}$$

Άρα $x = 2 \quad y = 13/3$

$z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 13/3 = 44/3$

(β) $L = 3x + 2y + \lambda_1(2-x) + \lambda_2(15 - x - 3y) + \lambda_3(10 - 2x - y) + \mu_1 x + \mu_2 y$

Για $x, y > 0 \rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$ $\quad \lambda_3(10 - 2 \cdot 2 - 13/3) = 0 \rightarrow \lambda_3 = 0$

$\partial L/\partial x = 3 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_1 = 3 - \lambda_2 = 7/3$

$\lambda_3 = 0$

$\partial L/\partial y = 2 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_2 = 2/3$

Άρα $\lambda_1 = 7/3$ $\lambda_2 = 2/3$ $\lambda_3 = 0$ $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ικανοποιούν τις συνθήκες

(γ) $x \le 2 \leftrightarrow 2 - x \ge 0 \leftrightarrow 1{,}9 - x \ge 0 \Rightarrow 2 - x \ge 0{,}1$

$15 - x - 3y \ge 0 \leftrightarrow 15 - x - 3y \ge -0{,}1$

Άρα $\Delta f = -\lambda_1 \cdot 0{,}1 - \lambda_2(-0{,}1) =$

$= -\frac{7}{3} \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 2/3 = \frac{-0{,}7 + 0{,}2}{3} = \frac{-0{,}5}{3} = -1/6$

Άρα το βέλτιστο γίνεται

$44/3 + \Delta f = \frac{44}{3} - 1/6 = \frac{88 - 1}{6} = 87/6$

2. (α) Μέσο κόστος $\sqrt{2KDS} + pD$

A: $\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 200} + 3 \cdot 200 = 800{,}0$

B: $\sqrt{2 \cdot 150 \cdot 200} + 2{,}5 \cdot 200 = 744{,}9$

(β) Το πάγιο του A γίνεται $K_1 = 100 + 3 \cdot 500 = 1600$

και κόστος $\sqrt{2 \cdot 1600 \cdot 200} = 800$

Άρα δεν βελτιώνει την προσφορά του

2

γ. $c_k = \min\limits_{1 \le \tau \le n-k} \left\{ K + h(d_{k+1} + 2d_{k+2} + \dots + \tau d_{k+\tau}) + c_{k+\tau+1} \right\}$

c_k: κόστος από k έως n με αρχικό απόθεμα μηδέν.

Αρχίζουμε το μεταβλητό

$c_5 = 0 \qquad c_4 = 8 \qquad c_3 = \min\{\underset{\tau=1}{8+8} \,;\, \underset{\tau=2}{8+0{,}5\cdot 7}\} = 11{,}5$

$c_2 = \min\{\underset{\tau=1}{8+\overset{11,5}{c_3}} \,;\, \underset{\tau=2}{8+0{,}5\cdot 2+\overset{8}{c_4}} \,;\, \underset{\tau=3}{8+0{,}5(2+2\cdot 7)}\} = 16$

$c_1 = \min\{\underset{\tau=1}{\overset{24}{8+\overset{16}{c_2}}} \,;\, \underset{\tau=2}{\overset{20}{8+0{,}5\cdot 1+\overset{11,5}{c_3}}} \,;\, \underset{\tau=3}{8+0{,}5(1+4)+c_4} \,;\, \underset{\tau=4}{\overset{13}{8+0{,}5(1+4+21)}}\}$

$= 18{,}5$

Στο 1 παραγγέλνω 5+1+2 μονάδες, στο 4 7 μονάδες.

3. (α) x_{ij}: Ποσότητα από i σε j $\quad i=1,\dots,5 \quad j: A,B,\Gamma,\Delta$

$a_{ij} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & \cdot \\ 9 & & \end{bmatrix}$

$\min \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=A,B,\Gamma,\Delta} x_{ij}\, a_{ij}$

με $\sum_{j=A,\dots} x_{ij} \le b_i \qquad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad i=1,\dots,5$

$\sum_{i=1} x_{ij} \ge \gamma_j \qquad \gamma_j = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix} \quad j=A,\dots,\Delta$

$x_{ij} \ge 0$ και ακέραιοι.

Εφόσον έχουμε ακεραιότητα το πρόβλημα είναι NP-complete, μπορεί να είναι δύσκολο για το γενικό...

(β) Βρείτε ικανοποιητική λύση

(iii)-(iiii) y^1_{ij}: φορτηγα μεγαλα y^2_{ij} φορτηγα μικρα στη διαδρομη $i \to j$

Πρεπει $x_{ij} \le 10 y^1_{ij} + 5 y^2_{ij}$, y^k_{ij} ακεραια

Το κοστος ειναι: $\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} + \sum_i \sum_j \left(10 y^1_{ij} + 5 y^2_{ij}\right)$

4. (α) Χαρακτηριστικο πολυωνυμο $s^2 - 4s - 5 = 0$

$(s-5)(s+1) = 0$. Αρα οι λυσεις της ομογενους ειναι $x_n = A\,5^n + B(-1)^n$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 = A + B \\ x_1 &= -1 = A\cdot 5 - B \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A + B &= 1 \\ 5A - B &= -1 \end{aligned} \quad \to \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

Αρα $x_{1000} = (-1)^{1000} = 1$

Αν $x_n = 4x_{n-1} + 5x_{n-2} + 3$, ειδικη λυση $x_n = X$

$X = 4X + 5X + 3 \Rightarrow X = -3/8$ και η γενικη λυση ειναι $x_n = -3/8 + A\,5^n + B(-1)^n$

$x_0 = 1 = -3/8 + A + B \to A + B = 11/8$

$x_1 = -1 = -3/8 + 5A - B \to 5A - B = -5/8$

$\to A = 1/8 \quad B = 10/8 \quad x_{1000} = -3/8 + \frac{1}{8} 5^{1000} + \frac{10}{8}(-1)^{1000}$

$= -3/8 + \frac{1}{8} 5^{1000} + 10/8 \sim \infty!$

β. $L = x + 3y + \lambda(4 - x^2 - 2y^2) + \mu(y-1)$

$\lambda, \mu \ge 0$ $\quad \partial L/\partial x = 1 - 2x\lambda = 0 \quad (1) \quad (\to x > 0)$

$\partial L/\partial y = 3 - 4\lambda y + \mu = 0 \quad (2)$

, Για λυση πρεπει $\lambda > 0$ αρα $4 = x^2 + 2y^2$

, Αν $\mu > 0$, $y = 1$ και $4 = x^2 + 2 \to x = \sqrt{2}$

και $\lambda = 1/2x = 1/2\sqrt{2}$ και $\mu = 4\lambda y - 3 = \frac{4}{2\sqrt{2}} - 3 < 0$

αρα αδυνατο

, Αν $\mu = 0$ $\quad y = 3/4\lambda > 0 \quad 4 = x^2 + 2y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + 2\frac{9}{16\lambda^2}$

$\frac{22}{16}\frac{1}{\lambda^2} = 4 \quad \lambda^2 = \frac{22}{16\cdot 4} \to \lambda = 0{,}586 \quad y = 1{,}279$ αποδεκτο!

$$\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -13/4 \\ -1/4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/3 & -1 & 13/3 & -2 \\ 1 & 0 & 10/3 & 2 & 4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 3/4 \\ 3 \end{array}$$

κλπ.

(β) $C = \begin{pmatrix} 1/100 & -1/100 \\ -1/100 & 4/100 \end{pmatrix} = 1/100 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$C x = \begin{pmatrix} \frac{10}{5} - 1 \\ \frac{15}{5} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\to \quad x_1 = 2a \quad x_2 = a \qquad n_1 = \frac{2}{3} \quad n_2 = 1/3$

$$R_M = 2/3 \cdot 10 + 1/3 \cdot 15 = 35/3$$

Άρα

$5x_0 + (1-x_0)\frac{35}{3} = 15 \to 15x_0 + (1-x_0)35 = 45$

$-20x_0 = 10 \to x_0 = -1/2$

$x_1 = 1/2 \cdot 2/3 = 1/3 \quad x_2 = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$