Επιχειρησιακή Έρευνα - Τελική Εξέταση – Ιούνιος 2011

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5° ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα σε περίπτωση που παραδώσετε το γραπτό σας στο τέλος της εξέτασης.

Θέμα 1.

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\ f(x, y, z) = 3x+2y+4z$$

με περιορισμούς

$$2x+2y + 3z \leq 12$$
$$x + y - 3z \leq 16$$
$$x, y, z \geq 0$$

(α 50%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

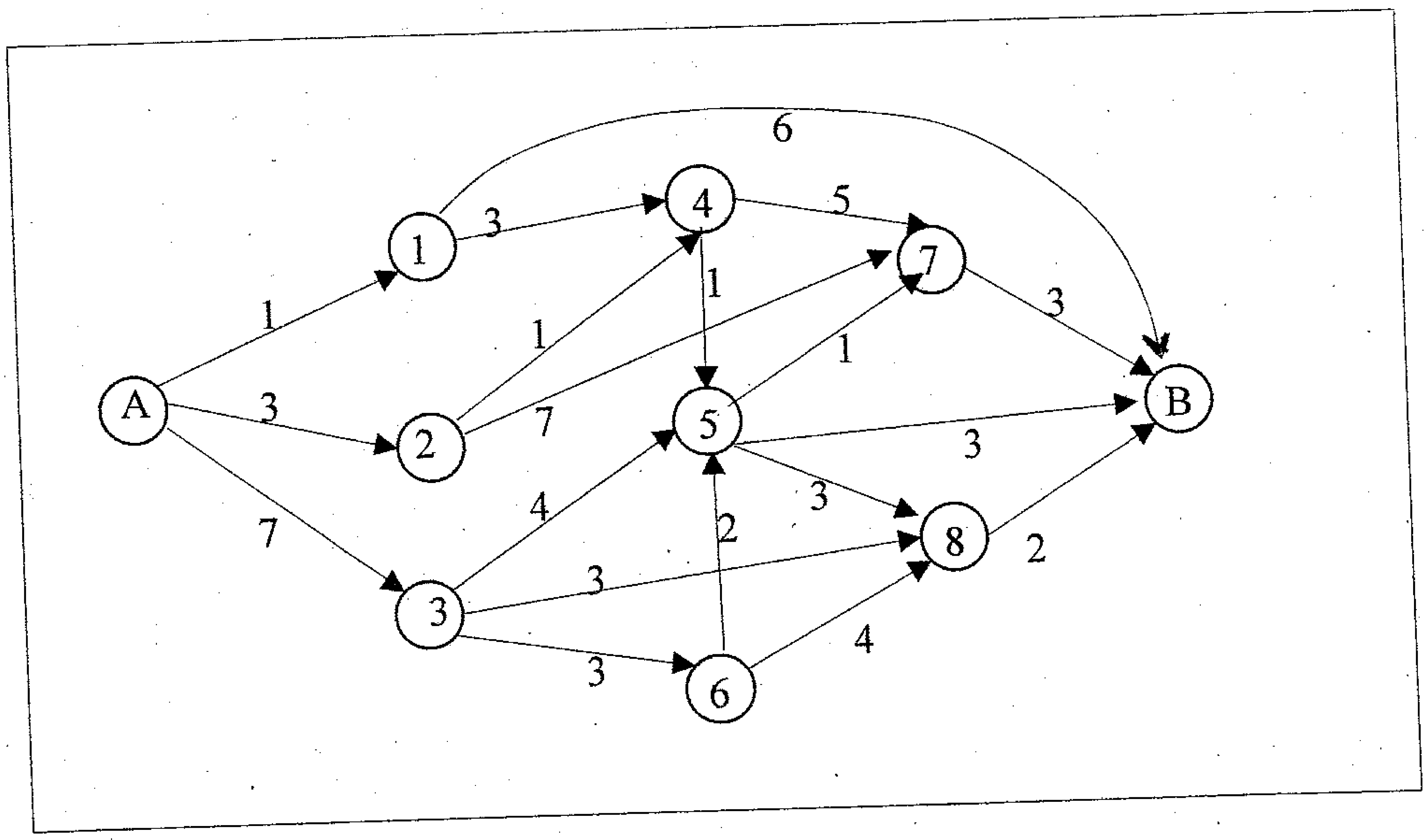
(β 30%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker

(γ 20%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βελτίστου αν οι περιορισμοί γίνουν ως εξής, με ίδια αντικειμενική συνάρτηση

$$2x -2y + 3z \leq 12$$
$$x + y + 3z \leq 16$$
$$x, y, z \geq 0$$

Θέμα 2

(α 70%) Εντοπίστε την διαδρομή ελαχίστου συνολικού μήκους μεταξύ των κορυφών Α και Β στο παρακάτω γράφημα



(β 30%) Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία. Το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 10%, τυπική απόκλιση 10% ενώ το δεύτερο 15% και 20% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων 0,5. Επίσης υπάρχει ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 5%. Ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση επί του κεφαλαίου του τουλάχιστον 30%. Επιβεβαιώστε ότι στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο τα μερίδια των επενδύσεων του στα αβέβαια περιουσιακά στοιχεία x_1, x_2 ικανοποιούν την σχέση $x_1=2\ x_2$ και κατόπιν υπολογίστε τα μερίδια των κεφαλαίων που θα επενδύσει σε κάθε περιουσιακό στοιχείο. (Εναλλακτικά, υπολογίστε απλώς το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο…)

Θέμα 3

(α 30 %) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 200 τεμάχια/μήνα, και εξετάζει τις προσφορές δύο προμηθευτών. Ο πρώτος έχει πάγιο παραγγελίας 100 ευρώ και τιμή μονάδας 3 ευρώ ανά τεμάχιο. Ο δεύτερος χρεώνει πάγιο 150 ευρώ και τιμή 2,5 ευρώ ανά τεμάχιο. Αν το κόστος αποθήκευσής μας είναι 1 ευρώ ανά τεμάχιο και μήνα, ποιά προσφορά θα δεχθεί η εταιρεία;

(β 40%) Ο πρώτος προμηθευτής «βελτιώνει» την προσφορά του αναφέροντας ότι δεν θα χρεώνει τιμή μονάδος στις ποσότητες άνω των 400 τεμαχίων και θα χρεώνει πάντα το ίδιο πάγιο. Ποιόν προμηθευτή θα επιλέξει τώρα η εταιρεία;

(γ 30%) Ένα κατάστημα ενός εποχιακού είδους (πχ. Χριστουγεννιάτικα είδη) πωλεί με κέρδος 120% επί της τιμής αγοράς. Τα αντικείμενα που δεν θα πωληθούν μέχρι και την παραμονή των Χριστουγέννων έχουν κόστος καταστροφής 20% της τιμής αγοράς των. Τυχόν μη ικανοποιηθείσα ζήτηση δεν ενδιαφέρει τον επιχειρηματία. Αν η ζήτηση που προβλέπεται έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 50 και 200 τεμαχίων, ποια ποσότητα θα παραγγείλει ο επιχειρηματίας έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο συνολικό του κέρδος;

Θέμα 4

(α 50%) Μία εταιρεία εισαγωγής αυτοκινήτων διαθέτει 12 αυτοκίνητα μιά δημοφιλούς μάρκας. Το καθένα θα εκτεθεί σε μία από τρείς εκθέσεις αυτοκινήτων στις περιοχές Α, Β, Γ. Αν ένα αυτοκίνητο εκτεθεί σε κάποια έκθεση δεν μπορεί να μετακινηθεί σε άλλη. Τα κέρδη που θα προκύψουν αν στην κάθε έκθεση διατεθεί ένας αριθμός αυτοκινήτων δίνεται στον παρακάτω πίνακα. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό υπολογίστε την καλύτερη κατανομή αυτοκινήτων σε εκθέσεις. Γράψτε οπωσδήποτε την εξίσωση δυναμικου προγραμματισμού για το πρόβλημα αυτό.

Αριθμός αυτοκινήτων	Έκθεση Α	Έκθεση Β	Έκθεση Γ
1	2	3	3
2	3	3	3
3	5	6	5
4	6	6	6
5	7	8	7
6	8	8	8
7	9	8	11
8 ή περισσότερα	12	10	13

(β 50%) Βρείτε ένα αναλυτικό τύπο που δίνει τον n-στο όρο της εξίσωσης διαφορών
$\boldsymbol{x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + n + 2}$ με αρχικές τιμές $x_0 = x_1 = 0$. Επιβεβαιώστε τον τύπο σας για π.χ. $n=4$.
Υπόδειξη: Δοκιμάστε ειδική λύση της μορφής $X(n)=an+b$ και εκτιμείστε τις παραμέτρους a,b.

Θέμα 5

(α 40%) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$\text{Min } x+3y$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x^2 + 2y^2 \leq 4$$
$$y \geq 1$$

(β 60%) Μία εταιρεία έχει κόστος προμήθειας μίας πρώτης ύλης που δίνεται από την συνάρτηση

$$K(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 10+50q & \text{αν } q>0 \end{cases}$$

Θέλει να κάνει προγραμματισμό 4 περιόδων $j=1, 2, 3, 4$ (τώρα βρίσκεται στην περίοδο 1) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος προμηθειών - αποθήκευσης. Θεωρεί ότι η ζήτηση στις επόμενες περιόδους είναι $d_1=3$, $d_2=2$ $d_3=6$ $d_4=3$ και δεν επιτρέπεται καθυστέρηση, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 1,5 €/μονάδα - περίοδο.

(ι) Διατυπώστε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (ιι) Λύστε την και προσδιορίστε την βέλτιστη ποσότητα παραγωγης σε κάθε περίοδο (ιιι) Θα ίσχυε η λύση που βρήκατε αν δεν είναι δυνατό να παραχθούν 7 ή περισσότερες μονάδες σε οποιαδήποτε περίοδο; Θα ίσχυε η εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού που γράψατε στο (ι);

Επιχειρησιακή Έρευνα
Λύσεις Ιουνίου 2011

Θέμα 2

(α)

$$\begin{array}{c} \\ -4/3 \\ +1 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & z \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -1/2 \\ \\ -9/2 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 & z-16 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 28 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 4/\tfrac{2}{3} = 6 \\ 28/3 = 9\tfrac{1}{3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & z-18 \\ 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -9/2 & -1/2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Άρα $x=6 \quad y=z=0$

(β) $$\mathcal{L} = 3x+2y+4z+\mu_1(12-2x-2y-3z) + \mu_2(16-x-y+3z)+\nu_1 x+\nu_2 y+\nu_3 z$$

Εφόσον $x>0$ είναι $\nu_1=0$. Επίσης εφόσον ο $2^{ος}$ περιορισμός δεν είναι αποτελεσματικός, $\mu_2=0$

$$\partial \mathcal{L}/\partial x = 3 - 2\mu_1 - \cancel{\mu_2}^{0} + \cancel{\nu_1}^{0} = 0 \qquad (1)$$

$$\partial \mathcal{L}/\partial y = 2 - 2\mu_1 - \cancel{\mu_2} + \nu_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\partial \mathcal{L}/\partial z = 4 - 3\mu_1 + 3\cancel{\mu_2} + \nu_3 = 0 \qquad (3)$$

Από την (1) $\mu_1 = 3/2$. Από την (2)

$$\nu_2 = 2\mu_1 - 2 = 3-2 = 1$$

Από την (3) $\nu_3 = 3\mu_1 - 4 = \frac{9}{2} - 4 = 1/2$

Εφόσον ν_2, μ_1, ν_3 προκύπτουν θετικά, οι ΚΤ ικανοποιούνται με $\mu_1 = 3/2 \; \mu_2 = 0 \quad \nu_1 = 0 \quad \nu_2 = 1 \quad \nu_3 = 1/2$.

(1γ)

$$\begin{array}{c} -2 \\ -\tfrac{1}{2} \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -\tfrac{1}{4} \\ -\tfrac{1}{4} \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 7-32 \\ 4 & 0 & 9 & 1 & 2 & 44 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ 11 \\ 16 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -17/4 & -1/2 & -5/2 & 7-43 \\ 1 & 0 & 9/4 & 1/4 & 1/2 & 11 \\ 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/2 & 5 \end{array}\right]$$

2 (α) Μια σειρά τοπολογικής ταξινόμησης είναι

A 3 2 1 4 6 5 8 7 B

Η εξίσωση ΔΠ είναι

$f(v) = \min \{d(v,w) + f(w)\}$

w: έπονται στην ταξινόμηση!

(Η τοπολογ. ταξινόμηση είναι απαραίτητη για την λύση!)

$f(B) = 0$

$f(7) = \underline{3}$ $\quad f(8) = \underline{2}$ $\quad f(5) = \min\{1+3;\ \underline{3+0};\ 3+2\} = 3$

$f(6) = \min\{\underline{2+\overset{3}{f(5)}};\ 4+\overset{2}{f(8)}\} = 5$

$f(4) = \min\{5+\overset{3}{f(7)};\ \underline{1+\overset{3}{f(5)}}\} = 4$

$f(1) = \min\{3+\overset{4}{f(4)};\ \underline{6+\overset{0}{f(B)}}\} = 6$

$f(2) = \min\{\underline{1+\overset{4}{f(4)}};\ 7+\overset{3}{f(7)}\} = 5$

$f(3) = \min\{4+\overset{3}{f(5)};\ \underline{3+\overset{2}{f(8)}};\ 3+\overset{5}{f(6)}\} = 5$

$f(A) = \min\{\underline{1+\overset{6}{f(1)}};\ 3+\overset{5}{f(2)};\ 7+\overset{5}{f(3)}\} = 7$

Διαδρομή $A \to 1 \to B$ (Β) από υπογραμμίσεις).

2(β) Πίνακας συνδιακύμανσης

$$C = \begin{bmatrix} 0,1^2 & 0,5\cdot 0,1\cdot 0,2 \\ 0,5\cdot 0,1\cdot 0,2 & 0,2^2 \end{bmatrix} = 0,1^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Αν x_1, x_2 τα μερίδια των αβέβαιων πρέπει

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{R_1-\rho}{\rho} \\ \frac{R_2-\rho}{\rho} \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda' = \lambda \cdot 0.05)$$

ή $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda'' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda'' = \lambda'/0,1^2)$$

ή $$-3\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda'' \\ x_1 + 4x_2 &= 3\lambda'' \end{aligned} \right.$$

που συνεπάγεται

ή $-2x_1 + x_2 = 0$ ή $x_2 = 2x_1$

Άρα δεν επιβεβαιώνεται η υπόδειξη.

Το χαρτοφ. αγοράς είναι $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $\left(\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_2 + x_1 &= 1 \end{aligned}\right)$

με απόδοση $10\,\frac{1}{3} + 15\,\frac{2}{3} = 13,333\%$

Για να επιτύχει απόδοσης 30% πρέπει

$5x_0 + (1-x_0)\frac{40}{3} = 30$ ή $(15-40)x_0 + 40 = 90$

ή $-25x_0 = 50$ ή $x_0 = -2$ και $1 - x_0 = 3$

Άρα δανειζόμαστε 2 φορές το κεφάλαιό μας και επενδύουμε 3 φορές (2+1) το κεφάλαιό μας με απόδοση $-2\cdot 5\% + 3\cdot\frac{40}{3} = 30\%$

3(α). Αν $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{s}}$ το μέσο κόστος είναι

$$\frac{KD}{Q} + pD + \frac{sQ}{2} = \sqrt{2KDs} + pD$$

Για τον 1ο το κόστος είναι $\sqrt{100\cdot 200} + 3\cdot 200$
$= 800$ €/μήνα

Για τον 2ο $\sqrt{300\cdot 200} + 2,5\cdot 200 = 744,9$

προτιμάται ο 2ος

(β) Αν παραγγελθούν μεγάλες ποσότητες με ισοδύναμο κόστος $K' = 100 + 3 \cdot 400$, $\pi = 0$ με κόστος $\sqrt{2K'DS} + 0 = \sqrt{2 \cdot 1300 \cdot 200} = 721{,}1$, που είναι καλύτερο!

Το EOQ είναι $\sqrt{\frac{2K'D}{s}} = 721{,}1$, αφού μεγαλύτερο από προηγούμενο $\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 200}{}} \simeq 245\right)$

(γ) $F(Q^*) = \dfrac{p - c}{p - h}$

$p = 1{,}2c + c = 2{,}2c \qquad h = -0{,}2c$

$F(Q^*) = \dfrac{(2{,}2 - 1)c}{(2{,}2 + 0{,}2)c} = \dfrac{1{,}2}{2{,}4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$F(q) = \dfrac{q - 50}{150}$ $(50 \le q \le 200)$ άρα $\dfrac{Q - 50}{150} = 1/2$

$Q = 125$.

4 (a) $f_{J \cup \{J\}}(x) = \max\limits_{y \le x} \left\{ g_J(y) + f_J(x - y) \right\}$

J: Παλιές εκδόσεις ή(?) νέα έκδοση

$f_A(x)$: όπως στον πίνακα

$f_{BA}(1) = 3 \qquad f_{BA}(2) = 5$

$f_{BA}(3) = \max\{ \underset{0 \text{ από } B}{\overset{5}{f_A(3)}} ; \underset{1 \text{ από } B}{\underline{3 + \overset{3}{f_A(2)}}} ; \underset{2 \text{ από } B}{3 + \overset{2}{f_A(1)}} ; \underset{3 \text{ από } B}{6 + f_A(0)} \} = 6$

$f_{BA}(4) = \max\{ \underset{0 \text{ από } B}{f_A(4)} ; \underset{1 \text{ από } B}{3 + \overset{5}{f_A(3)}} ; \underset{2 \text{ από } B}{3 + \overset{3}{f_A(2)}} ; \underset{3 \text{ από } B}{\underline{6 + \overset{2}{f_A(1)}}} ; \cancel{6 + f_A(0)} \}$

$f_{BA}(5) = \max\{ 7 ; \underline{3 + \overset{6}{f_A(4)}} ; \cancel{3 + f_A(5)} ; 6 + \overset{3}{f_A(2)} ; X ; 8 \} = 8$

$= 9$

$$f_{BA}(6) = \max\{8;\ 8+f_A^{2}(1);\ \dots;\ \underset{3}{6}+f_A^{5}(3);\ \dots;\ \underset{1}{3}+f_A^{7}(5);\ 8\}$$
$$= 11$$

$$f_{BA}(7) = \max\{\ ;\dots;\ \underset{5\ \text{απο}\ B}{8}+f_A^{3}(2);\ \underset{3\ \text{απο}\ B}{6}+f_A^{6}(4);\ 3+f_A^{8}(6)\} = 12$$

$$f_{BA}(8) = \max\{10;\ \dots;\ 8+f_A^{5}(3);\ 6+f_A^{7}(5);\ 3+f_A^{9}(7)\}$$
$$= 13$$

$$f_{\Gamma BA}(12) = \max\{\underbrace{13+f_{BA}^{8}(4)}_{8\ \text{απο}\ \Gamma};\ \underset{7\ \text{απο}\ \Gamma}{11}+f_{BA}^{9}(5);\ \underset{6}{8}+f_{BA}^{11}(6);\ \underset{5}{7}+f_{BA}^{12}(7);$$
$$;\ \underset{4}{6}+f_{BA}^{13}(8);\ \dots\} = 21$$

Άρα 8 απο Γ, 3 απο B, 1 απο A με
έσοδο $13+6+2 = 21$

(ε) Χαρακτ. πολυώνυμο
$$s^2 - 5s + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad (s-3)(s-2) = 0$$
ή $s=2$, $s=3$ ~~και~~ λύση ομογενούς
$$x_n^{ομ} = P_1 2^n + Q 3^n$$
Ειδική λύση: $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + n + 2$

$$\to an+b = 5(an-a+b) - 6(an-2a+b) + n + 2$$
$$n(a-5a+6a-1) = -b-5a+5b-12a-6b+2$$
Έχουμε ο συντελεστής του n είναι 0, πρέπει
$a = 1/2$
Η σταθερά είναι επίσης 0, ή $-2b - 17/2 + 2 = 0$
ή $b = -13/4$ οπότε η λύση είναι
$$x_n = P2^n + Q3^n + \tfrac{1}{2}n - 13/4$$. Τα P, Q ικανοποιούν
$$x_0 = 0 = P + Q - \frac{13}{4} \qquad x_1 = 0 = 2P + 3Q - \frac{11}{4}$$
ή $Q + \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = 0 \to Q = -15/4$ $\quad P = \frac{28}{4} = 7$
$x_2 = 4$. $\frac{28}{4}4 - 15/4\cdot 9 + 1 - 13/4$ $\quad 28 - \frac{135+4-13}{4}$

$135 - 9 = 126$
$48 - 13 = 35$

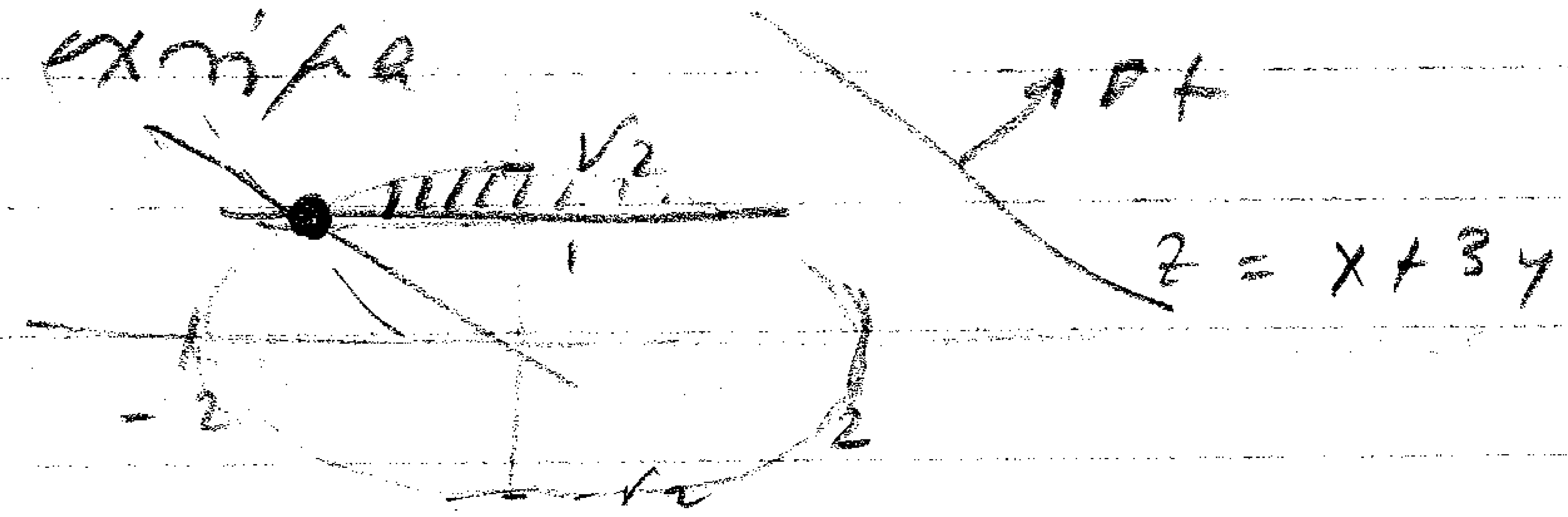
5(α) $\mathcal{L} = -x - 3y + \mu(4 - x^2 - 2y^2) + \lambda(y-1)$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = -1 - 2\mu x = 0$ (1)

$\partial \mathcal{L}/\partial y = -3 - 4\mu y + \lambda = 0$ (2)

Από την (1) είναι $\mu > 0$ και $x = -1/2\mu < 0$
και άρα $x^2 + 2y^2 = 4$
Αν $\lambda > 0$, πρέπει $y = 1$ και άρα $x^2 = 4 - 2y^2 = 2$
άρα $x = -\sqrt{2}$ και $\mu = -1/2x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
οπότε από την (2)

$\lambda = 3 + 4\mu$ που όντως είναι θετικό
άρα επιβεβαιώνονται οι συνθήκες
Αν $\lambda = 0$ θα ήταν $y = -\frac{3}{4\mu} < 0$ που
αντιβαίνει την συνθήκη $y \geq 1$. Άρα
η βέλτιστη λύση είναι $y = 1$ $x = -\sqrt{2}$
Βλέπε σχήμα



(β) Αγνοούμε το 5ο q εξόδου το εισαγωγικό μεταβλητό κόστος είναι σταθερό.

Είναι $f_t = \min_m \{ \overset{10}{K} + \overset{1,5}{h}(d_{t+1} + 2d_{t+2} + \dots + m d_{t+m}) + f_{t+m+1} \}$

$f_5 = 0$ $f_4 = 10$ $f_3 = \min\{10+10 ; \underline{10 + 1,5 \cdot 3}\} = 14,5$

Παραγ. για 3 Για 3,4

$f_2 = \min\{\underbrace{10 + \overset{14,5}{f_3}}_{2} ; \underbrace{10 + 1,5\cdot 6 + \overset{10}{f_4}}_{2,3} ; \underbrace{10 + 1,5 \cdot 6 + 1,5 \cdot 2 \cdot 3}_{2,3,4}\} = 24,5$

$f_1 = \min\{10 + \overset{24,5}{f_2} ; \underbrace{\underline{\overset{27,5}{10 + 1,5 \cdot 2 +} \overset{14,5}{f_3}}}_{1,2} ; \underbrace{10 + 1,5 \cdot 2 + 10 + 1,5 \cdot 2 \cdot 6}_{1,2,3} ; \underbrace{10 + 1,5 \cdot 2 + \dots}_{1,2,3,4}\}$
$= 27,5$

Παραγωγή 5 το χρόνο 1, 9 τον χρόνο 2, κ.λ.π...