Επιχειρησιακή Έρευνα –Τελική Εξέταση – Ιούνιος 2014

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ σημειώσεις από το μάθημα. Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε περισσότερα, το 5^o κατά σειρά ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα εφόσον αποχωρήσετε στο τέλος της εξέτασης.

Θέμα 1

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\ \ 4x+3y+6z$$

με περιορισμούς

$$3x+y+2z \le 30$$
$$2x+2y+3z \le 40$$
$$x, y, z \ge 0$$

(α 60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

(β 20%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker

(γ 20%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βέλτιστου αν στο παραπάνω πρόβλημα απαιτηθεί επιπλέον να ισχύει $y \ge 0{,}1$ (τα άλλα στοιχεία του προβλήματος δεν μεταβάλλονται)

Θέμα2

(α) Έστω το πρόβλημα

$$max\ x^2+2y+3z^4$$

με περιορισμούς

$$x+y+z \le 4$$
$$2x-3y+3z \le 3$$
$$3x+4y \le 7$$
$$x,y,z \ge 0$$

Εξετάστε αν οι τιμές $x=0,\ y=3/2,\ z=5/2$ αποτελούν λύση του προβλήματος

(β) Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\max \sum_{i=1}^{1000} a_i e^{x_i}$$

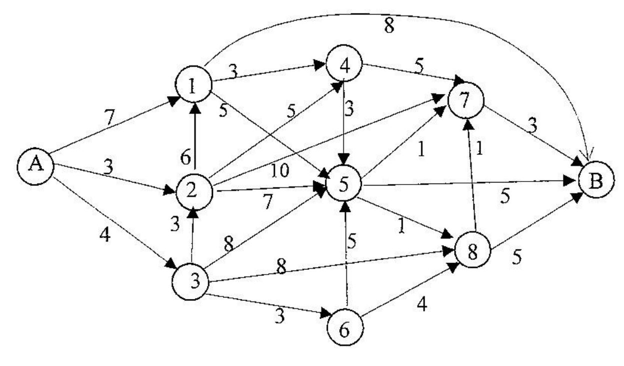
Με περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{1000} b_i x_i^2 \le b \ \text{και} \ \sum_{i=1}^{1000} c_i / {x_i}^2 \le c$$
$$x_i \ge 0 \ \text{για}\ i = 1,\dots,1000$$

Οι παράμετροι του προβλήματος a_i, b_i, c_i έχουν εγγραφεί σε ένα φύλλο λογισμικού στις θέσεις *A1:A1000, B1:B1000, C1:C1000*, ενώ τα b,c στις θέσεις *D1,D2* αντίστοιχα. Διατυπώστε το πρόβλημα σε Solver κάνοντας «λίγες» πληκτρολογήσεις. Συγκεκριμένα διαμορφώστε το σχετικό φύλλο λογισμικού και συμπληρώστε το «παράθυρο διαλόγου» του Solver.

Θέμα 3

(α) Εντοπίστε την διαδρομή ελαχίστου συνολικού μήκους μεταξύ των κορυφών Α και Β στο παρακάτω γράφημα χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό. Γράψτε πρώτα την εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού και δείξτε σαφώς τον τρόπο επίλυσής της.



(β) Λύστε το εξής πρόβλημα

$$\max x+2y$$

με περιορισμούς

$$x+y \leq 3$$
$$3x+y \geq 6$$
$$x, y \geq 0$$

Υπόδειξη: Εντοπίστε πρώτα μία αρχική βασική λύση

Θέμα 4

α. Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 200 τεμάχια/μήνα, και εξετάζει τις προσφορές δύο προμηθευτών. Ο πρώτος έχει πάγιο παραγγελίας 100 ευρώ και τιμή μονάδας 3 ευρώ ανά τεμάχιο. Ο δεύτερος χρεώνει πάγιο 150 ευρώ και τιμή 2,5 ευρώ ανά τεμάχιο. Αν το κόστος αποθήκευσής μας είναι 1 ευρώ ανά τεμάχιο και μήνα, ποιά προσφορά θα δεχθεί η εταιρεία; ***Προαιρετικά**: Τι θα συνέφερε αν η αποθήκη της εταιρείας είναι χωρητικότητας 200 τεμαχίων;*

β. Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο αβέβαια περιουσιακά στοιχεία, το πρώτο έχει αναμενόμενη απόδοση 10%, τυπική απόκλιση 15% ενώ το δεύτερο 15% και 20% αντίστοιχα, ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης αποδόσεων 0,5. Επίσης υπάρχει ένα βέβαιο περιουσιακό στοιχείο με απόδοση 5%. Αν ο επενδυτής επιθυμεί απόδοση επί του κεφαλαίου του τουλάχιστον 20% ποιό χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να σχηματίσει; ***Προαιρετικά**: σχολιάστε την λύση που βρήκατε, δηλαδή γιατί συνεπάγεται δανεισμό και πόσο αποτελεσματική είναι η μείωση του κινδύνου.*

Θέμα 5

α. Μία εταιρεία παραγωγής μηχανημάτων έχει δεχθεί για τον επόμενο μήνα παραγγελίες από πελάτες Α, Β, Γ,Δ ως εξής: 300 μηχανήματα από τον πελάτη Α, 400 από τον Β , 500 από τον Γ και 200 από τον Δ. Η εταιρεία διαθέτει πέντε εργοστάσια σε διαφορετικές τοποθεσίες και ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει το κόστος μεταφοράς ανά μηχάνημα από κάθε εργοστάσιο προς καθένα από τους πελάτες. Το 1^{o} εργοστάσιο μπορεί να παραγάγει έως 200 μηχανήματα, το 2^{o} έως 300, το 3^{o} 500 το 4^{o} έως 200 το 5^{o} έως 200. Η εταιρεία θέλει να αποφασίσει πόσα μηχανήματα θα μεταφέρει τον επόμενο μήνα από κάθε εργοστάσιο προς κάθε πελάτη έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος

Πελάτης	Α	Β	Γ	Δ
Εργοστάσιο	Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς			
1	12	20	5	7
2	9	7	11	8
3	10	30	9	7
4	13	5	8	6
5	9	10	4	30

(ι) Διαμορφώστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει (ιι) Τα μηχανήματα μεταφέρονται με φορτηγά χωρητικότητας 50 μηχανημάτων το καθένα, με πάγιο κόστος 100 μονάδων ανά φορτηγό. Το κόστος των φορτηγών είναι επιπλέον του κόστους που αναφέρθηκε προηγουμένως. Διαμορφώστε το πρόβλημα *(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε ακέραιες μεταβλητές για τα φορτηγά)* (ιιι) **Προαιρετικά**: Έστω ότι υπάρχουν φορτηγά δύο τύπων, 1 και 2. Ο τύπος 1 έχει χωρητικότητα 20 μηχανημάτων και κόστος 50 ενώ ο τύπος 2 έχει χωρητικόητα 60 και κόστος 100. Διαμορφώστε το πρόβλημα. (Υπόδειξη: εισάγετε δύο είδη ακέραιων μεταβλητών για τα φορτηγά..)

β. Ένα πλοίο εμπορευματοκιβωτίων μπορεί να φορτώσει Κ είδη κιβωτίων. Από κάθε είδος μπορεί να φορτώσει απεριόριστο αριθμό κιβωτίων. Το είδος i φέρνει έσοδο a_i και έχει βάρος b_i. Το πλοίο μπορεί να μεταφέρει συνολικό βάρος Β. Γράψτε την σχετική εξίσωση Δυναμικού προγραμματισμού, και λύστε την για πλοίο χωρητικότητας 12 ~~κιβωτίων~~ με τύπους κιβωτίων όπως στον παρακάτω πίνακα:
μονάδων βάρους

Τύπος κιβωτίου	Α	Β	Γ	Δ
Έσοδο	10	8	4	11
Βάρος	5	4	3	6

Επιχειρησιακή Έρευνα
Ιούνιος 2014
Πρόχειρη Λύση

1.α.

$$\begin{array}{c} \\ -3/2 \\ -1/2 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & w \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 30 \\ 20 \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ -1/3 \\ \ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & -3/2 & w-60 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 10 \\ 1 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 20 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 20 \\ 40/3 \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & w-80 \\ 5/3 & -1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 10/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & 0 & 1/2 & 40/3 \end{bmatrix}$$

$z = 40/3$

$10 - \frac{20}{3}$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$-\frac{3}{6}$

β $\mathcal{L} = 4x + 3y + 6z + \mu_1(30 - 3x - y - 2z) + \mu_2(40 - 2x - 2y - 3z) + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z$

$\partial \mathcal{L}/\partial x = 4 - 3\mu_1 - 2\mu_2 + \nu_1 = 0$

$\partial \mathcal{L}/\partial y = 3 - \mu_1 - 2\mu_2 + \nu_2 = 0$

$\partial \mathcal{L}/\partial z = 6 - 2\mu_1 - 3\mu_2 + \nu_3 = 0$

$z \geq 0 \rightarrow \nu_3 = 0 \quad \mu_1 = 0 \quad (2 \cdot \frac{40}{3} < 30)$

$4 = 2\mu_2 - \nu_1 \longrightarrow \nu_1 = 0$

$3 = 2\mu_2 - \nu_2 \longrightarrow \nu_2 = 1$

$6 = 3\mu_2 \longrightarrow \mu_2 = 2$

γ. Άρα $W' = W - \nu_2 \Delta y = 80 - \frac{1}{10} = 79{,}9$

2α. $\mathcal{L} = x^2 + 2y + 3z^4 + \lambda_1(4 - x - y - z)$
$+ \lambda_2(3 - 2x + 3y - 3z) + \lambda_3(7 - 3x - 4y)$
$+ \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z$

Αντικαθιστώντας $x = 0$ $y = 3/2$ $z = 5/2$ οι δύο πρώτοι περιορισμοί ικανοποιούνται ισότητα, ο τρίτος ανισότητα άρα $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_3 = 0$. Επίσης $\mu_2 = \mu_3 = 0$ $\mu_1 \geq 0$.

$\rightarrow$ $\partial\mathcal{L}/\partial x = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu_1 = 0$ (1)

$\partial\mathcal{L}/\partial y = 2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ (2)

$\partial\mathcal{L}/\partial z = 12z^3 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ (3)

Από (2), (3)

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 12\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{^3\cancel{12}\cdot 125}{\cancel{8}\,2} = \frac{3\cdot 125}{2}$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3\cdot 125}{2}\right) = \frac{379}{4} \geq 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(\lambda_1 - 2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{371}{4} = \frac{371}{12} \geq 0$$

Από την (1) $\mu_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2$ που είναι όμως μη αρνητικό. Άρα οι σχέσεις ικανοποιούνται

2β. Βρεθε [illegible] λύσεις

3. Τοπολογική ταξινόμηση:

$B \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow A$

$f_7 = 3$ $\quad f_8 = \min\{1 + 3;\ 5\} = 4$ $\quad f_5 = \min\{5,\ 1+3,\ 1+5\} = 4$

$f_6 = \min\{4 + \overset{f_8}{4};\ 5 + f_5\} = 8$ $\quad f_4 = \min\{4 + f_7;\ 3 + \overset{4}{f_5}\} = 7$

$f_1 = \min\{8;\ 3 + \overset{7}{f_4};\ 5 + \overset{4}{f_5}\} = 8$

$f_2 = \min\{6 + \overset{8}{f_1};\ 5 + \overset{7}{f_4};\ 7 + \overset{4}{f_5}\} = 11$

$f_3 = \min\{3 + \overset{f_2}{11};\ 8 + \overset{4}{f_5};\ 8 + \overset{8}{f_6};\ 3 + f_6\} = 11$

$f_A = \min\{7 + \overset{8}{f_1};\ 3 + \overset{11}{f_2};\ 4 + \overset{11}{f_3}\} = 14$

3β Βοηθητικό πρόβλημα

min t

$$x + y + s_1 = 3$$
$$3x + y - s_2 + t = 6$$
$$x, y, s_1, s_2, t \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & w \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ -1/3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & w+6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \end{bmatrix}$$

Βασική λύση $x = 2 \quad s_1 = 1$

$$\begin{array}{c} -3 \\ \\ -1/2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 2-3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/3 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5/2 & -3/2 & 2-9/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/3 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \qquad x = y = 3/2$$

4. (α) $\sqrt{2KDS} + pD$ Για τον (1) κόστος

$\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 1} + 3 \cdot 200 = 800$ €/μήνα

$\sqrt{2 \cdot 150 \cdot 200} + 2{,}5 \cdot 200 = 200(2{,}5 + \sqrt{1{,}5}) = 744{,}9$ €/μήνα

$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 200}{1}} = 200$

$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 200}{1}} = 200 \cdot \sqrt{1{,}5} = 244{,}9$ τεμ.

Αν η χωρητικότητα της αποθήκης είναι 200, το κόστος του Α δεν επηρεάζεται. Όμως η προμήθεια από τον Β θα είναι το πολύ 200 με κόστος

$\frac{KD}{Q^*} + pD + \frac{SQ^*}{2} = \frac{150 \cdot 200}{200} + 2{,}5 \cdot 200 + \frac{1 \cdot 200}{2} = 750$

που εξακολουθεί να είναι προτιμότερο του Α!

4 β $$C = \begin{bmatrix} 0{,}15^2 & 0{,}5\cdot 0{,}15\cdot 0{,}20 \\ 0{,}5\cdot 0{,}15\cdot 0{,}20 & 0{,}20^2 \end{bmatrix} =$$

$$C^{-1}x \cong \begin{pmatrix} \frac{R_1}{\rho} - 1 \\ \frac{R_2}{\rho} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cong \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \quad C^{-1} \sim \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Άρα $n_1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad n_2 = \frac{3}{4}$

$$R_m = \frac{1}{4}10 + \frac{3}{4}15 = \frac{55}{4} = 13\,3/4\ \%$$

Άρα $5x_0 + 13\,3/4\,(1-x_0) = 20$

$$(-13\,3/4 + 5)\,x_0 = 6\,1/4 = 25/4$$

$$-35/4\ x_0 = 25/4 \quad x_0 = -25/35$$

$$x_1 = (1-x_0)\,n_1 = \frac{60}{35}\cdot 1/4 = 15/35$$

$$x_2 = \frac{60}{35}\cdot\frac{3}{4} = \frac{45}{35}$$

5.(α) min $12x_{1A} + 20x_{1B} + \dots + 9x_{2A} + \dots + 8x_{2\Delta}$

$10x_{3A} + \dots + 7x_{3\Delta}$

$13x_{4A} + \dots + 6x_{4\Delta}$

$9x_{5A} + \dots + 30x_{5\Delta}$

Μέ:

• x_{ij} μη αρνητικοί ακέραιοι (μηχανήματα!)

• $x_{1A} + x_{1B} + \dots + x_{1\Delta} \le 200$

$x_{2A} + \dots + x_{2\Delta} \le 300$

κλπ.

• $x_{1A} + x_{2A} + \dots + x_{5A} = 300$

$x_{1B} + x_{2B} + \dots + x_{5B} = 400$

κλπ.

(ii) Φορτηγά: Έστω y_{ij} ακέραιοι με

$$x_{ij} \le 50\, y_{ij} \quad \text{όλα τα } i,j.$$

και την αντικ. συνάρτηση αφαιρέστε κατά $100 \sum_{i,j} y_{ij}$

5.β (Το πρόβλημα εννοεί ότι η χωρητικότητα του φορτίου είναι $B = 12$ μονάδες βάρους).

$$f(M) = \max_{j \in \{A,B,\Gamma,\Delta\}} \{ a_j + f(M - b_j) \}$$

a_j, b_j: έσοδο, βάρος κιβωτίου j.

$f(3) = 4, \; f(4) = 8 \quad f(5) = 10$

$$f(6) = \max\{\underset{A}{10 + f(1)};\ \underset{B}{8 + f(2)};\ \underset{\Gamma}{4 + \overset{4}{f(3)}};\ \underset{\Delta}{11 + f(0)}\}$$

$= 11$

$$f(7) = \max\{10 + \overset{10}{f(2)};\ 8 + \overset{4}{f(3)};\ 4 + \overset{8}{f(4)};\ 11 + \overset{0}{f(1)}\}$$

$= 12 \quad (B + \Gamma)$

$$f(8) = \max\{10 + \overset{4}{f(3)};\ 8 + \overset{8}{f(4)};\ 4 + \overset{10}{f(5)};\ 11 + \overset{0}{f(2)}\}$$

$= 16$

$$f(9) = \max\{10 + \overset{8}{f(4)};\ 8 + f(5);\ 4 + f(6);\ 11 + \overset{4}{f(3)}\} = 18$$

$$f(10) = \max\{10 + \overset{10}{f(5)};\ 8 + \overset{11}{f(6)};\ 4 + f(7);\ 11 + f(4)\}$$

$= 20$

$$f(11) = \max\{10 + \overset{11}{f(6)};\ 8 + \overset{12}{f(7)};\ 4 + \underset{16}{f(8)};\ 11 + f(5)\} = 21$$

$$f(12) = \max\{10 + f(6);\ 8 + f(8);\ 4 + f(9);\ 11 + f(6)\}$$

$= 24 \qquad 3 \times B$ ✓

Άρα 3 κιβ. είδους B