# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ

- ΕΣΤΩ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΕΤΟΧΕΣ, ΠΡΟΘΕΣΜΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ Κ.Α.Π.) ΠΟΥ ΥΠΟΔΗΛΩΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ $i, j = 0, 1, 2, .., n$.

- Η <u>ΑΠΟΔΟΣΗ</u> ΤΟΥ ΚΑΘΕΝΟΣ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ $\tilde{R}_j$. Η ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ $\tilde{R}_j$ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΓΝΩΣΤΗ.

- <u>ΑΠΟΔΟΣΗ</u> $\tilde{R}_j$ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ: ΑΝ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΩ ΣΤΟ $j$ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟ ΠΟΣΟ $K_j$, ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΠΕΡΙΟΔΟ $T$ ΘΑ ΕΧΩ ΠΟΣΟ $K_{j,T} = K_j \cdot (1 + \tilde{R}_j T)$. ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ $\tilde{R}_j$ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΑΒΕΒΑΙΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ.

- ΑΝ ΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΜΟΥ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ ΙΣΟΥΝΤΑΙ ΜΕ ΕΝΑ ΠΟΣΟ $K$, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ $\sum_{j=0}^{n} K_j \leq K$

- <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: ΤΑ $K_j$ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΑ. ΤΟΤΕ ΣΗΜΑΙΝΟΥΝ ΔΑΝΕΙΣΜΟ.

- <u>ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ</u> ΕΙΝΑΙ Η ΑΠΟΦΑΣΗ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΑ $K_j$. ΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΥΠΟΔΗΛΩΝΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ ΔΕΙΚΤΗ $p$ ($p$: PORTFOLIO)

- Η <u>ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ</u> ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΩΣ

$$\tilde{R}_p = \frac{1}{T} \frac{\sum_j K_j (1 + \tilde{R}_j T) - \sum_j K_j}{\sum_j K_j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{K_j}{\sum_{l=0}^{n} K_l} \cdot \tilde{R}_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x_j \tilde{R}_j$$

ΟΠΟΥ $x_j = k_j \Big/ \sum_{\ell=0}^{n} k_\ell$ ΕΡΜΗΝΕΥΕΤΑΙ ΩΣ ΤΟ <u>ΜΕΡΙΔΙΟ</u> ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΣ ΠΟΥ ΕΠΕΝΔΥΕΤΑΙ ΣΤΟ $j$. ΠΡΟΦΑΝΩΣ $\sum x_j \leq 1$ ΑΝ $\sum k_j > 0$.

- ΣΥΜΒΑΤΙΚΑ ΤΟ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ <u>ΒΕΒΑΙΑΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ</u>, ΔΗΛΑΔΗ

$$Prob(\tilde{R}_0 = \rho) = 1 \quad ή \ \rho_0$$

ΟΠΟΤΕ Η ΑΠΟΔΟΣΗ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ $\rho$ ΜΕ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ.

- Η ΑΠΟΔΟΣΗ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΙΣΗ ΜΕ

$$E(\tilde{R}_p) = \sum_{j=0}^{n} x_j \, E(\tilde{R}_j)$$

- ΚΑΙ Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

$$Var(\tilde{R}_p) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} x_j x_\ell \, Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_\ell)$$

ΟΠΟΥ $Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_\ell) = E\left\{\left[\tilde{R}_j - E(\tilde{R}_j)\right]\left[\tilde{R}_\ell - E(\tilde{R}_\ell)\right]\right\}$ Η ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

- ΜΕΓΑΛΟ ΜΕΡΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΚΕΠΤΙΚΟ: ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΠΟΔΟΣΗ <u>ΠΑΝΩ</u> ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΠΙΘΥΜΗΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ, ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΘΕΙ ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΥΤΟ ΤΕΘΗΚΕ ΑΠΟ ΤΟΝ MARKOWITZ ΤΗΝ ΔΕΚΑΕΤΙΑ ΤΟΥ 1950. ΒΛΕΠΕ WIKIPEDIA: MODERN PORTFOLIO THEORY.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΕΤΑΙ ΩΣ

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j c_{ij} \qquad c_{ij} = Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{n} x_i \bar{R}_i \ge R_{ΕΠΙΘ} \qquad \bar{R}_i = E(\tilde{R}_i)$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{n} x_i \le 1$$

· Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΥΚΟΛΗ: ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN TUCKER:

$$\mathcal{L} = -\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j c_{ij} + \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i - R_{ΕΠΙΘ} \right) + \mu \left( 1 - \sum_{i=0}^{n} x_i \right) \qquad (\lambda, \mu \ge 0)$$

ΠΡΕΠΕΙ $\partial \mathcal{L} / \partial x_0 = 0$, $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0$ ΚΛΠ.

ΑΛΛΑ $\partial \mathcal{L} / \partial x_0 = \lambda R_0 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \lambda R_0$.

ΕΠΙΣΗΣ $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = -2 \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + \lambda \bar{R}_i - \mu = 0$

ΑΝ ΤΩΡΑ $\lambda = 0$, ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ $\mu = 0$ ΟΠΟΤΕ $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = 0$ ΚΑΙ ΑΡΑ $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΦΙΚΤΗ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n \le 1 \Longrightarrow x_0 \le 1$$

ΚΑΙ $x_0 R_0 + x_1 \bar{R}_1 + \dots \ge R_{ΕΠΙΘ}$

$$x_0 R_0 \ge R_{ΕΠΙΘ}$$

ΑΝ ΟΜΩΣ $R_0 < R_{ΕΠΙΘ}$, Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ ($x_0 \le 1 \rightarrow R_0 x_0 \le R_0 < R_{ΕΠΙΘ}$ ΚΑΙ ΑΡΑ $R_0 x_0 < R_{ΕΠΙΘ}$)

ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ο $\lambda > 0$ ΚΑΙ $\mu > 0$, ΚΑΙ
ΑΡΑ $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$, $\sum_{i=0}^{n} x_i \bar{R}_i = R_{επιθ.}$

ΔΗΛΑΔΗ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ, ΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΚΡΙΤΙΚΟΙ! ΑΡΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ LAGRANGE, Ή ΝΑ ΣΥΝΕΧΙΣΟΥΜΕ ΜΕ $\lambda, \mu > 0$.

ΑΠΟ ΤΙΣ $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0$ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = \frac{\lambda}{2} (\bar{R}_i - R_0) \qquad i=1,\dots,n$$

ή
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \left(\frac{x_j}{\lambda}\right) = \frac{\bar{R}_i - R_0}{2} \qquad i=1,\dots,n$$

ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $n \times n$ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΑΝ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΧΟΥΝ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑ. Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ
ΕΣΤΩ $x_j^* = x_j / \lambda$ ΟΠΟΤΕ $x_j = x_j^* \lambda$

ΑΥΤΟ ΔΕΙΧΝΕΙ ΟΤΙ Ο ΛΟΓΟΣ $\dfrac{x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = \dfrac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*}$
ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ $\bar{R}$, $c$ ΚΑΙ <u>ΟΧΙ</u> ΤΗΝ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΑΠΟΔΟΣΗ.

ΑΥΤΗ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΗ ΩΣ ΙΔΙΟΤΗΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ: ΟΛΟΙ ΟΙ ΕΠΕΝΔΥΤΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΙΔΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΕΠΕΝΔΥΟΥΝ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΑΒΕΒΑΙΩΝ ΤΙΤΛΩΝ, ΓΙΑ ΝΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΟΥΝ ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΤΟΥΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΥΝ ΤΟ ΒΕΒΑΙΟ ΠΕΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΜΕ ΤΟ ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΑΥΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ.

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΕΣΤΩ ΒΕΒΑΙΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΜΕ $R_0 = \rho = 5\%$
ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΒΕΒΑΙΑ $i = 1,2$ ΜΕ $\bar{R}_1 = 10\%$
$\sigma_1 = 10\%$ $\bar{R}_2 = 15\%$ $\sigma_2 = 10\%$ ΚΑΙ
$\rho_{12} = \dfrac{C_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = -0,5$ . ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΟ

ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ MARKOWITZ ΓΙΑ $R_{ΕΠΘ} = 12\%, 20\%, 5\%$.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΝΑΙ

$$\min \quad x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$= \frac{1}{100^2}\left[10^2 x_1^2 + 10^2 x_2^2 - 10^2 x_1 x_2\right]$$

$$= \frac{1}{10^2}\left[x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2\right]$$

ΜΕ
$$\left.\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_0 + 10x_1 + 15x_2 = 100\,R_{ΕΠΘ} \end{array}\right\}$$

ΕΙΝΑΙ
$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + \lambda\,(5x_0 + 10x_1 + 15x_2) + \mu\,(x_0 + x_1 + x_2)$$

(ΔΕΝ ΑΣΧΟΛΟΥΜΑΣΤΕ ΜΕ ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΩΝ $\lambda, \mu$ ΕΦΟΣΟΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤ. ΜΕ ΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ...)

$$\partial\mathcal{L}/\partial x_0 = 5\lambda + \mu = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x_1 = 2x_1 - x_2 + 10\lambda + \mu = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x_2 = -x_1 + 2x_2 + 15\lambda + \mu = 0$$

Ή

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -5\lambda \\ -x_1 + 2x_2 = -10\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{x_1}{\lambda} - \dfrac{x_2}{\lambda} = -5 \\ -\dfrac{x_1}{\lambda} + \dfrac{2x_2}{\lambda} = -10 \end{cases}$$

ΚΑΙ ΑΡΑ $x_1/\lambda = -20/3$ , $x_2/\lambda = -25/3$

ΑΡΑ $$\frac{x_1}{x_1+x_2} = \frac{-20\lambda}{-20\lambda-25\lambda} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{x_2}{x_1+x_2} = \frac{-25\cancel{\lambda}}{-45\cancel{\lambda}} = \frac{5}{9}$$

ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΤΙΜΗ ΤΟΥ $\lambda$; ΘΑ ΕΞΑΡΤΗΘΕΙ ΑΠΟ ΤΟ $R_{ΕΠΙΘ}$. ΑΝ ΕΙΝΑΙ $R_{ΕΠΙΘ} < R_0$ ΤΟΤΕ Η ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ $x_1 = x_2 = 0$ $x_0 = 1$ (ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ... ). ΑΝ ΟΜΩΣ $R_{ΕΠΙΘ} > R_0$ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_0 + 10x_1 + 15x_2 = R_{ΕΠΙΘ}\cdot 100 \end{cases} \quad (1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 - \frac{45}{3}\lambda = 1 \\ 5x_0 + 10\left(-\frac{20}{3}\right)\lambda + 15\left(-\frac{25}{3}\right)\lambda = R_{ΕΠΙΘ}\cdot 100 \end{cases}$$

ΑΠ' ΟΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ $\lambda$. ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $x_1/x_2 = 4/5$ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (1) ΕΙΝΑΙ $5x_1 + 10x_2 = R_{ΕΠΙΘ}100 - 5$ ΠΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΟΝΤΑΙ

$$14x_2 = 100\cdot R_{ΕΠΙΘ} - 5$$

ΕΤΣΙ ΓΙΑ $R_{ΕΠΙΘ} = 12\%$ ΕΙΝΑΙ

$$14x_2 = 7 \rightarrow x_2 = 50\% \Rightarrow x_1 = 40\%$$
$$\Rightarrow x_0 = 10\%$$

• ΠΟΙΑ Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΑΥΤΟΥ;

• ΓΙΑ $R_{ΕΠΙΘ} = 10\%$, ΠΟΙΟ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ; ΕΙΝΑΙ

$$14x_2 = 10 - 5 = 5 \rightarrow x_2 = 5/14 \quad x_1 = 4/14$$

ΚΑΙ $x_0 = 5/14$

Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΕΙΝΑΙ

$$0{,}10^2\left(\frac{4}{14}\right)^2 + 0{,}10^2\left(\frac{5}{14}\right)^2 - 0{,}10^2\,\frac{5\cdot 4}{14^2}$$

$$= 0{,}10^2\left[\frac{21}{14^2}\right]$$ ΚΑΙ Η ΤΥΠΙΚΗ

ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ $0{,}10\,\frac{\sqrt{21}}{14} = 0{,}0328 = 3{,}3\%$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΑΠΟ Π.Χ. ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ 1ου ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΑΠΟΔΟΣΗ 10% ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ 10%.

- ΠΟΙΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΓΙΑ $R_{επιθ} = 15\%$; ΠΩΣ ΣΥΓΚΡΙΝΕΤΑΙ Η ΤΥΠΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ $\sigma_2 = 10\%$;