10/12/03

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΑΝ $\max f(\underline{x})$ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ ΜΕ $g(\underline{x}) = 0$

ΠΟΛ/ΣΤΗ μ $(\mathcal{L} = f + \mu g)$ ΤΟΤΕ: ΑΝ Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΙΝΕΙ $g(\underline{x}) = \varepsilon$ Η ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΘΑ ΑΛΛΑΞΕΙ ΚΑΤΑ $-\mu \cdot \varepsilon$

<u>ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ</u>

$$\max f(\underline{x}) \quad \text{ή} \quad \min f(\underline{x})$$

$$g_1(\underline{x}) \geq 0 \qquad g_1(\underline{x}) \geq 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g_k(\underline{x}) \geq 0 \qquad g_k(\underline{x}) \geq 0$$

$\Uparrow$ ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ — $\Uparrow$ ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΛΑΧ

NB*: ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΟΤΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΚΑΘΩΣ ΟΙ ΙΣΟΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ π.χ. $g(\underline{x}) = 0$ ΕΙΝΑΙ <u>ΔΥΟ</u> ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΙ: $g(\underline{x}) \geq 0,\ -g(\underline{x}) \geq 0$

- ΣΥΝΘΗΚΕΣ <u>ΠΕΡΙΠΟΥ</u> ΙΔΙΕΣ ΜΕ LAGRANGE
  - KUHN - TUCKER (~1950)
  - KARUSH (~1930)

- ΣΕ <u>LAGRANGE</u> $\mathcal{L} = f + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_k g_k$

  ΚΑΙ
  - $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$
  - $\partial \mathcal{L} / \partial \mu_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$

  <u>ΚΑΙ</u> ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΑ $\mu_j \cdot g_j = 0$

- ΣΕ KUHN TUCKER — ΜΕΓΙΣΤ. ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ
- ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ $\underline{x}$ ΥΠΑΡΧΟΥΝ $\underline{\mu_j \geq 0}$ $j = 1, \dots, k$
- ΩΣΤΕ ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ LAGRANGE

---

* NB: NOTA BENE, ΠΡΟΣΕΞΑΤΕ

- $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0 \qquad i=1,\dots,n$
- $\mu_j g_j(\underline{x}) = 0 \qquad j=1,\dots,\ell$
- $g_j(\underline{x}) \geq 0 \qquad j=1,\dots,\ell$

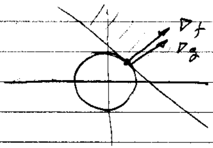
  $\hookrightarrow$ ή $\partial \mathcal{L} / \partial \mu_j \geq 0$

Η ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΝ ΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΟ $\underline{x}$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΤ ΕΙΝΑΙ ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ <u>ΘΕΤΙΚΗ</u> ΤΩΝ ΙΣΟΤΗΤΩΝ $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0$, ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ; • KARUSH: ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ
• KUHN-TUCKER: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $\min \; x^2 + y^2$

ΥΠ $\; x + y \geq 1$



ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΤΑ ∇f, ∇g ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΑ ΚΑΙ ΙΔΙΑΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ. ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝ ΚΙΝΟΥΜΑΣΤΕ ΚΑΤΑ ΤΟ ∇g ΘΑ ΕΙΧΑΜΕ ΕΠΙΤΡΕΠΤΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ ΠΟΥ ΘΑ ΜΕΙΩΝΕ ΤΗΝ f, ΑΤΟΠΟ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ!

ΓΡΑΦΟΥΜΕ $\min x^2+y^2 = -\max(-x^2-y^2)$

$$x+y-1 \geq 0$$

ΑΡΑ $\mathcal{L} = -x^2-y^2+\mu(x+y-1)$

$$\left.\begin{aligned} \partial\mathcal{L}/\partial x &= -2x+\mu = 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial y &= -2y+\mu = 0 \end{aligned}\right\} x = y = \mu/2$$

ΑΡΑ ΑΝ $\mu > 0$ Ή $\mu(x+y-1) = 0$

ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ $x+y = 1$ Ή $x = y = 1/2$

ΑΡΑ $\mu = 1 > 0$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> ΤΟ $\max x^2+y^2$ ΜΕ $x+y \geq 1$

ΕΧΕΙ $\mathcal{L} = x^2+y^2+\mu(x+y)$ ΟΠΟΤΕ

$x = y = -\mu/2$ (ΓΙΑΤΙ;)

ΑΝ $\mu > 0$ ΤΟΤΕ $x = y = 1/2$ ΑΛΛΑ ΚΑΙ

$x = y = -\mu/2 < 0$ ΑΤΟΠΟ! ΑΡΑ

ΠΡΕΠΕΙ $\mu = 0$ ΟΠΟΤΕ $x = y = 0$

ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΑΥΤΟ ΑΤΟΠΟ ΕΦΟΣΟΝ $x+y \geq 1$

<u>ΑΡΑ</u> ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΗΜΕΙΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ Κ-Τ! ΓΙΑΤΙ;

- ΑΝ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣΘΕΣΟΥΜΕ ΤΟΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ $x+2y \geq 1$ ΠΡΟΦΑΝΩΣ Η ΛΥΣΗ ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ! ΤΟΤΕ Ο ΠΟΛ/ΣΤΗΣ μ ΑΥΤΗΣ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΘΕΩΡΗΘΕΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ!

<u>ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ</u> ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ: (KARUSH)

<u>ΙΔΕΑ</u>: <u>ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ</u> $g_j \geq 0$ ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ $g_j - \varepsilon_j^2 = 0$ ΜΕ ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ε_j. (ΤΑ ε_j ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΜΕ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓ/ΣΜΟ!)

ΕΧΟΥΜΕ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\mathcal{L} = f + \mu_1 (g_1 - \varepsilon_1^2) + \mu_2 (g_2 - \varepsilon_2^2) + \dots$$

ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΙΝΑΙ

· $\partial \mathcal{L}/\partial x_i = \partial f/\partial x_i + \mu_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_i} + \mu_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots$

(ΤΑ ε_j <u>ΔΕΝ</u> ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ!)

· $\partial \mathcal{L}/\partial \varepsilon_j = -2\mu_j \varepsilon_j = 0$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΕ $\mu_j \varepsilon_j^2 = 0$

Ή $\underline{\mu_j g_j = 0}$

· ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ μ_j;

· ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ <u>ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>.

· ΑΝ ΓΡΑΨΟΥΜΕ $g_j - \varepsilon^2 = \eta$ ΜΕ $\eta > 0$

ΤΟΤΕ $g_j = \varepsilon^2 + \eta \geq \eta$

· ΑΡΑ ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΧΕΙ ΛΙΓΟΤΕΡΕΣ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ $g_j \geq 0$

· ΑΡΑ ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΧΕΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΛΥΣΗ, ΔΗΛΑΔΗ $(-\mu_j)\eta \leq 0$ ΑΠΟ ΘΕΩΡΙΑ LAGRANGE ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ $\mu_j \geq 0$

· ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ <u>ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>

$-\mu_j \cdot \eta \geq 0$ Ή $\mu_j \leq 0$ (ΓΙΑΤΙ;)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $\min\ x^2 + y^2$ ΜΕ $x + y - 1 \geq 0$

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \mu (x + y - 1)$$

ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ ΕΧΟΥΜΕ $x = y = -\mu/2$.

· ΑΝ $\mu \neq 0$ ΕΧΟΥΜΕ $x = y = 1/2$ ΚΑΙ $\mu = -1$

· ΑΡΑ ΤΟ $x = y = 1/2$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΙΣ ΚΤ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (KUHN-TUCKER)

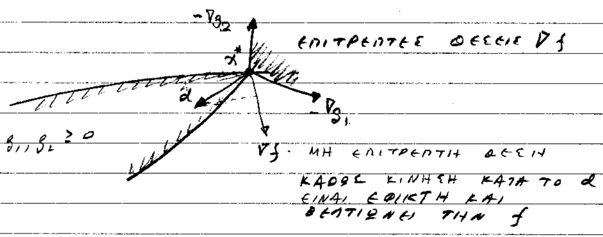
· ΕΣΤΩ ΥΠΟΨΗΦΙΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ x^*. ΕΣΤΩ $g_i(x^*) = 0$ ΓΙΑ $i=1,2$ ΚΑΙ $g_i(x^*) > 0$ $i > 2$. ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ x^* ΟΝΤΩΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟ, ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ d ΠΟΥ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ

· $\nabla f(x^*) \cdot d > 0$ ΚΑΙ $\nabla g_i(x^*) \cdot d_i > 0$ $i=1,2$

[ΔΙΟΤΙ ΤΟΤΕ ΓΙΑ ΜΙΚΡΟ ΑΡΙΘΜΟ $\lambda > 0$ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΟ ΝΕΟ ΥΠΟΨΗΦΙΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ $x^0 = x^* + \lambda d$. ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ $\Delta f = \nabla f(x^*) \cdot d \cdot \lambda > 0$ ΚΑΙ $\Delta g_i > 0$ $i=1,2$, ΕΝΩ ΑΝ λ ΑΡΚΕΤΑ ΜΙΚΡΟ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ. ΑΡΑ ΤΟ x^0 ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΟΥ x^*, ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟ].

· ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ $\nabla f(x^*)$ ΠΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΝΘΗΚΗ:

ΤΟ ∇f ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ <u>ΘΕΤΙΚΟΣ</u> ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ∇g_i ΓΙΑ i ΜΕ $g_i = 0$



ΑΡΑ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ x^* ΕΙΝΑΙ $\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{\ell} -\mu_j \nabla g_j(x^*)$ ΓΙΑ $j=1,\dots,\ell$

ΟΠΟΥ $g_j(x^*) = 0$ / ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN TUCKER

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

ΑΝ ΘΕΣΟΥΜΕ $\mu_j = 0$ ΓΙΑ $j = \ell+1,\dots,k$ ΟΠΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $g_j(x^*) > 0$.

· ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΟ ΕΞΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ.

0. ΑΡΧΙΖΟΥΜΕ ΜΕ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ x_0.
1. ΑΝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ, ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ d ΩΣΤΕ $\nabla f(x_0)\cdot d > 0$ ΚΑΙ $\nabla g_j(x_0)\cdot d > 0$ ΓΙΑ ΤΑ $g_j(x_0) = 0$
   — ΑΥΤΟ ΑΠΑΙΤΕΙ ΒΕΒΑΙΑ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ~~ΚΕΣ~~ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΓΙΑ ΘΕΤΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ, ΔΗΛΑΔΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ!
2. ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΟ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\max_{\lambda \geq 0} f(x_0 + \lambda d)$
   ΜΕ λ ΩΣΤΕ $g_j(x_0 + \lambda d) > 0$
3. Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΑΣ ΔΙΝΕΙ ΕΝΑ λ^* ΚΑΙ ΕΝΑ ΝΕΟ ΥΠΟΨΗΦΙΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ
   $x_1 = x_0 + \lambda^* d$
4. ΣΥΝΕΧΙΖΟΥΜΕ ΕΩΣ Π.Χ. $|\lambda^*| <$ ΜΙΚΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\max\ x+y$

$g_1 = 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad g_2 = y \geq 0$

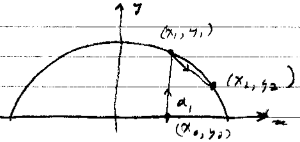
· ΑΡΧΙΖΟΥΜΕ ΜΕ $(x_0, y_0) = (1/2, 0)$, ΟΠΟΥ $g_1 > 0$, $g_2 = 0$

· ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ d ΩΣΤΕ $\nabla f d = (1,1)\cdot d > 0$ ΚΑΙ $\nabla g_2 \cdot d = (0,1)\cdot d > 0$. ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ $d_1 = (0,1)$ ΚΑΙ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $(1/2, \lambda)$ $\lambda \geq 0$.

ΤΟ "ΚΑΛΥΤΕΡΟ" λ ΕΙΝΑΙ $\sqrt{3}/2$ (ΓΙΑΤΙ)

ΘΕΤΟΥΜΕ $(x_1, y_1) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ΠΟΥ ΠΑΛΙ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ. (ΓΙΑΤΙ;)

ΜΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ d_2 ΕΙΝΑΙ Η $d_2 = (3/2, -1)$ ΠΟΥ ΜΑΣ ΟΔΗΓΕΙ ΣΕ ΝΕΟ ΥΠΟΨΗΦΙΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ Κ.Ο.Κ.



ΕΝΤΟΠΙΣΤΕ ΤΟ (x_2, y_2). ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ;

<u>ΑΣΚΗΣΗ - ΕΡΩΤΗΣΗ</u>: ΠΕΡΙΓΡΑΨΤΕ ΕΝΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΠΟΥ ΝΑ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ. ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΛΥΣΑΜΕ ΤΗΝ ΜΟΡΦΗ LAGRANGE ΜΕ ΤΑ ε^2, ΑΛΛΑ ΚΑΠΟΙΟ μ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟ. ΠΩΣ ΜΕΤΑΒΑΙΝΟΥΜΕ ΣΕ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΟΥ ΕΧΕΙ "ΚΑΛΥΤΕΡΗ" ΛΥΣΗ;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Έστω το πρόβλημα

$$\max \quad x^2+y^2+3z^2$$

με περιορισμούς

$$x+y+3z \le 10$$
$$2x+y+z \le 6$$
$$x,y,z \ge 0$$

Εφαρμόζοντας το στο Solver, μας προτείνεται από το λογισμικό η λύση $x=y=0 \quad z=10/3$

Επιβεβαιώστε ότι στο σημείο αυτό επαληθεύονται οι συνθήκες βέλτιστου.

Η L είναι $L = x^2+y^2+3z^2+\mu_1(10-x-y-3z)$
$\qquad + \mu_2(6-2x-y-z)+\mu_3 x+\mu_4 y+\mu_5 z$

· Στο προτεινόμενο σημείο είναι $\mu_2=\mu_5=0$ (γιατί;)
· Οι συνθήκες παραγώγων είναι

$$\partial L/\partial x = 2x-\mu_1-2\mu_2+\mu_3=0$$
$$\partial L/\partial y = 2y-\mu_1-\mu_2+\mu_4=0$$
$$\partial L/\partial z = 6z-3\mu_1-\mu_2+\mu_5=0$$

Αντικαθιστώντας τα x,y,z,μ_2,μ_5 οι σχέσεις αυτές γίνονται

$$-\mu_1+\mu_3=0$$
$$-\mu_1+\mu_4=0$$
$$20-3\mu_1=0$$

Άρα $\mu_1 = 20/3 = \mu_3=\mu_4 > 0$ και είναι παραδεκτές τιμές. Άρα οι συνθήκες επαληθεύονται.

Εφαρμογή 2 Έστω υποψήφια λύση $x=3$ $y=z=0$
Εξετάστε αν ισχύουν και σ' αυτήν οι συνθήκες βέλτιστου.

Είναι $\mu_1 = 0 = \mu_3$ λόγω συμπληρωματικότητας.
Οι συνθήκες παραγώγων γίνονται

$$\partial L/\partial x = 6 - 2\mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \mu_2 = 3$$
$$\partial L/\partial y = 0 - \mu_2 + \mu_4 = 0 \quad \Rightarrow \mu_4 = \mu_2 = 3$$
$$\partial L/\partial z = 0 - \mu_2 + \mu_5 = 0 \quad \Rightarrow \mu_5 = \mu_2 = 3$$

Άρα αποδεκτή λύση είναι $\mu_1 = 0 = \mu_3$ $\mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = 3$ και οι συνθήκες επιβεβαιώνονται και εδώ.

Σχόλια Και οι δύο λύσεις $(3,0,0)$ και $(0,0,10/3)$ είναι τοπικά βέλτιστα. Προφανώς η δεύτερη λύση δίνει μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

· Το λογισμικό Solver ενδέχεται να καταλήξει είτε στην μια είτε στην άλλη λύση, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες. Επιβεβαιώστε το. Ποια είναι η ολικά βέλτιστη λύση;

Σημείωση. Προβλήματα σαν το προηγούμενο είναι γνωστά ως "Τετραγωνικός Προγραμματισμός". Για τέτοια προβλήματα έχουν αναπτυχθεί ειδικοί αλγόριθμοι, διαφορετικοί με αυτούς του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Εφαρμογή 3. Έστω τώρα η υποψήφια λύση $x=1$ και $y=z=0$. Εξετάστε πάλι τις συνθήκες.

Είναι $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ οπότε οι συνθήκες παραγώγων είναι $2+\mu_3=0 \Rightarrow 2=0$ αδύνατο!

· $\mu_4=0$

· $\mu_5=0$

Άρα δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες!

· Τι ισχύει για την λύση $x=y=z=0$;