ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Φ. ΜΑΓΕΙΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ
ΕΚΔΟΣΗ 2.5 – ΙΟΥΝΙΟΣ 2014

Κεφάλαιο 1. Μαθηματικός Προγραμματισμός

1.1. Εισαγωγή

Με τον γενικό όρο Μαθηματικός Προγραμματισμός εννοούμε τα προβλήματα βελτιστοποίησης με ανισοτικούς περιορισμούς. Στο αντικείμενο του μαθηματικού προγραμματισμού περιλαμβάνεται και η ανάπτυξη αλγορίθμων βελτιστοποίησης που είναι κατάλληλοι για εφαρμογή σε υπολογιστή. Η ορολογία αυτή ξεκίνησε από την εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων στον προγραμματισμό της παραγωγής σε βιομηχανίες και στην οικονομία γενικότερα. Έτσι, η έννοια του μαθηματικού προγραμματισμού δεν έχει άμεση σχέση με τον προγραμματισμό των υπολογιστών.

Το γενικό πρόβλημα του ΜΠ (Μαθηματικού Προγραμματισμού) γράφεται ως:

$$\max f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in R^n$$

έτσι ώστε να ισχύουν ΟΛΕΣ οι k ανισότητες

$$g_1(\underline{x}) \geq 0,\ g_2(\underline{x}) \geq 0,\ \ldots,\ g_k(\underline{x}) \geq 0$$

Η γενική αυτή μορφή που θα αναφέρεται ως Κανονική Μορφή περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα που μπορεί να τεθούν, είτε είναι προβλήματα ελαχίστου, μεγίστου, είτε $g(\underline{x}) \geq 0$ ή ≤ 0 ή ακόμα και $=0$, καθώς κάθε πρόβλημα Μ.Π. μπορεί να πάρει συγκεκριμένη Κανονική Μορφή με συγκεκριμένες μετατροπές.

Παράδειγμα 1

Γράψτε το πρόβλημα $\min x + y$ με περιορισμό $x^2 + y^2 \leq 1$ στην παραπάνω μορφή.

Θέτουμε $f(x,y) = -x-y$ και $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Το πρόβλημα $-\max f(x,y)$ με $g(x,y) \geq 0$, είναι ίδιο με το προηγούμενο και είναι στην κανονική μορφή. □

Παράδειγμα 2

Ίδιο πρόβλημα όπως παραπάνω με τον επιπρόσθετο περιορισμό $x+y=1$.

Θέτουμε $g_1(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, και δύο επιπλέον συναρτήσεις περιορισμού $g_2(x,y) = x+y-1$ και $g_3(x,y) = 1-(x+y)$. Ο συνδυασμός των περιορισμών g_2 και $g_3 \geq 0$ ισοδυναμεί με $g_2 = g_3 = 0$ ή $x+y=1$. □

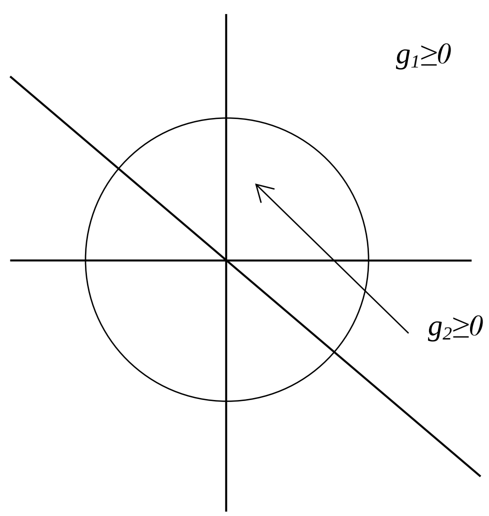
Πολλές φορές οι ανισοτικοί περιορισμοί δεν αποτελούν ουσιαστική δέσμευση στο πρόβλημα όπως π.χ. στο $\min (x-½)^2+(y-½)^2$ με $x^2+y^2 \leq 1$, όπου το ελάχιστο είναι προφανώς στο $x = y = ½$. Το ίδιο ελάχιστο θα προέκυπτε ακόμα και αν δεν υπήρχε ο ανισοτικός περιορισμός.

Ένας περιορισμός είναι ουσιαστικός (ή αποτελεσματικός ή ενεργός) αν δεν επιτρέπει την μετάβαση από ένα δεδομένο $\underline{x}$ σε όλα τα γειτονικά $\underline{x}+\Delta\underline{x}$. Αν όμως για κάποιο x υπάρχει μία περιοχή $N(x,\varepsilon)$[1] που ανήκει στο σύνολο $S\equiv\{x:g(x)\geq 0\}$ τότε το x είναι ακρότατο μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες για ελεύθερο ακρότατο, δηλαδή $\nabla f(x) = 0$ όπου το ανάδελτα ∇ υποδηλώνει την διανυσματική μερική παραγώγιση. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ο ορισμός $\nabla\varphi \equiv (\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2, \ldots, \partial\varphi/\partial x_n)$.

Για κάθε σημείο x ονομάζουμε αποτελεσματικούς περιορισμούς στο x αυτούς που συνεπάγονται ουσιαστική δέσμευση του x. Συγκεκριμένα, αν είναι $g_j(x)=0$, ο περιορισμός j λέγεται αποτελεσματικός στο x, ενώ αν είναι $g_j(x)>0$ ονομάζεται μη αποτελεσματικός.

Παράδειγμα 3:

Έστω $g_1(x,y)=x+y$ και $g_2(x,y)=1-x^2-y^2$. Στο $x=y=0$ ο πρώτος περιορισμός είναι αποτελεσματικός ενώ ο δεύτερος δεν είναι. Βλέπε το παρακάτω σχήμα.



1.2. Συνθήκες Kuhn - Tucker

Οι αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα $\underline{x}$ λύση του γενικού προβλήματος διατυπώθηκαν σε εύχρηστη μορφή από τους Kuhn και Tucker γύρω στα 1950 ενώ είχαν διατυπωθεί παλαιότερα από τον Karush. Εδώ παρουσιάζουμε μία απλουστευμένη εκδοχή των. Ακόμα και για την απλουστευμένη εκδοχή για να αποδειχθούν οι Συνθήκες Kuhn-Tucker χρειάζεται το παρακάτω αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας:

[1] Ορίζουμε ως περιοχή ακτίνας ε γύρω από το x το σύνολο $N(x,\varepsilon)=\{y \;/ |y-x|<\varepsilon\}$

Λήμμα (Farkas):

Έστω k διανύσματα γραμμής $\alpha^1, \alpha^2, .., \alpha^k$ και γενικά $\alpha^i \in R^n$, καθώς και ένα άλλο διάνυσμα γραμμής $c \in R^n$. Θεωρούμε τις k + 1 ανισότητες ως προς του n αγνώστους $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x$:

$c \cdot x < 0$ (δηλαδή $\sum_j c_j x_j < 0$) **και**

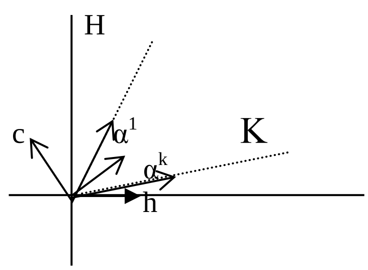
$\alpha^i \cdot x \geq 0$ (δηλαδή $\sum_j \alpha_j^i x_j \geq 0$) για $i=1,..,k$.

Αν δεν υπάρχει x που ικανοποιεί τις ανισότητες αυτές, τότε υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί $\mu_j \geq 0$, $j=1,2,..,k$, ώστε $c = \sum_j \mu_j \alpha^j$.

Ισχύει και το αντίστροφο, αν δηλαδή $c=\sum_j \mu_j \alpha^j$ για $\mu_j \geq 0$, τότε οι παραπάνω ανισότητες δεν έχουν λύση.

Απόδειξη:

Αν το c εκφραζόταν ως άθροισμα $\sum_j \mu_j \alpha^j$, το σύστημα των ανισοτήτων δεν θα μπορούσε να έχει λύση εφόσον θα ήταν $c \cdot x = \sum_j \mu_j (\alpha^j \cdot x) \geq 0$, αφού τόσο τα μ_j και οι παραστάσεις $(\alpha^j \cdot x)$ είναι μη αρνητικές. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει λύση στο σύστημα των ανισοτήτων αλλά ούτε και $\mu_j \geq 0$ τέτοια ώστε $c = \sum_j \mu_j \alpha^j$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $d=\sum_j \lambda_j \alpha^j$ με $\lambda_j \geq 0$ είναι ένα κυρτό σύνολο που ονομάζεται κώνος που παράγεται από τα α^j και συμβολίζεται με K. Βλέπε το παρακάτω Σχήμα 1:



Σχήμα 1

Εφόσον το c δεν μπορεί να γραφεί ως $c = \sum_j \mu_j \alpha^j$, δεν μπορεί να ανήκει στο K. Σύμφωνα τότε με το Θεώρημα του Διαχωριστικού Επιπέδου (που δεχόμαστε χωρίς απόδειξη), υπάρχει επίπεδο H τέτοιο ώστε τα c και τα α^j να κείνται στις δύο διαφορετικές περιοχές (ημιεπίπεδα) που διαχωρίζονται από το H. Αν h είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο H και στο ημιεπίπεδο των α, θα είναι $h \cdot \alpha^j \geq 0$ αλλά $c \cdot h < 0$, που έρχεται σε αντίφαση με την παραδοχή ότι το σύστημα των ανισοτήτων δεν έχει λύση. Άρα υπάρχουν αριθμοί $\mu_j \geq 0$ τέτοιοι ώστε $c = \sum_j \mu_j \alpha^j$. □

Θυμίζουμε τον ορισμό της «βαθμίδας» μιάς συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Έστω f μία συνάρτηση n μεταβλητών $x_1,x_2,..,x_n$. Το διάνυσμα βαθμίδας (ή ανάδελτα) ∇f υπολογισμένο σε συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών ορίζεται ως

$$\nabla f(x_1,x_2,..,x_n)=(\partial f/\partial x_1,.., \partial f/\partial x_n)$$

Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στις συγκεκριμένες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Παράδειγμα: Αν $f(x,y)=x^2+xy^3-e^y$ τότε $\nabla f(x,y) = (2x+y^3,3xy^2-e^y)$ και για έστω x=1, y=-2 το ανάδελτα είναι $\nabla f(1,-2) = (2\cdot 1+(-2)^3,3\cdot 1\cdot(-2)^2-e^{-2})=(-6,12- e^{-2})$

Θεώρημα (Συνθήκες Kuhn Tucker ή απλώς K-T):

Έστω ότι x^o είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος $max\ f(\underline{x})$ $\underline{x} \in R^n$ με $g_1(x)\geq 0,g_2(x)\geq 0,\dots,g_k(\underline{x})\geq 0$. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\mu_1, \mu_2,.., \mu_k \geq 0$ τέτοιοι ώστε

(α) $\nabla f(\underline{x}^o) + \sum_j \mu_j \nabla g_j(\underline{x}^o) = 0$

(β) $\mu_j\, g_j(\underline{x}^o) = 0$ *για* $j = 1,2,..,k$.

[Οι σχέσεις (β) γράφονται και ως $\sum_j \mu_j\, g_j(\underline{x}^o) = 0$, διότι εφόσον $\mu_j\geq 0$, $g_j(\underline{x}^o) \geq 0$, ο μόνος τρόπος να είναι το άθροισμα 0 είναι ο κάθε όρος να μηδενίζεται].

Απόδειξη:

Έστω ότι υπήρχε Δx τέτοιο ώστε $\nabla g_j(x^o)\cdot\Delta x \geq 0$ για τα j που αντιστοιχούν στους αποτελεσματικούς περιορισμούς αλλά και ταυτόχρονα $\nabla f(x^o)\cdot\Delta\underline{x} > 0$. Εφόσον ισχύει μία επιπλέον τεχνική λεπτομέρεια γνωστή ως "Ιδιότης των Περιορισμών" την οποία αποδεχόμαστε σιωπηρά**,** για μικρό αριθμό λ>0 θα ισχύει ότι το διάνυσμα $x^1=x^o+\lambda\Delta x$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος ΜΠ, εφόσον $g_j(x^1)\cong g_j(x^o)+\lambda\nabla g_j(x^o)\cdot\Delta x\geq 0$. Όμως θα είναι και $f(x^1) \cong f(x^o) + \lambda\nabla f(x^o)\cdot\Delta x > f(x^o)$ πράγμα που αντιβαίνει το ότι το x^o είναι μέγιστο. Άρα οι ανισότητες $-\nabla f(x^o)\cdot\Delta x<0$, $\nabla g_j(x^o)\cdot\Delta x\geq 0$ δεν έχουν λύση και άρα σύμφωνα με το Λήμμα Farkas υπάρχουν μ_j μη αρνητικά για τα j που αντιστοιχούν στους αποτελεσματικούς περιορισμούς τέτοια ώστε $-\nabla f(x^o) = \sum_j \mu_j \nabla g_j(x^o)$ ή $\nabla f(x^o)+\sum_j\mu_j \nabla g_j(x^o)=0$. Αν θέσουμε $\mu_j=0$ αν το j δεν αντιστοιχεί σε αποτελεσματικό περιορισμό, δηλαδή $\nabla g_j(x^o)>0$, θα είναι $\mu_j g_j(x^o)=0$ για <u>όλα</u> τα j, είτε αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς είτε όχι και επιπλέον βέβαια $\nabla f(x^o)+\sum_j\mu_j \nabla g_j(x^o)=0$, όπου το άθροισμα είναι ως προς όλα τα j και όχι μόνο αυτά που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς.

□

Τονίζεται ότι οι Συνθήκες K-T είναι **αναγκαίες** αλλά **όχι ικανές** για βέλτιστο, δηλαδή υπάρχουν σημεία που ικανοποιούν τις συνθήκες, ενώ σαφώς δεν είναι βέλτιστα. Μία τέτοια περίπτωση δίνεται στο Παράδειγμα 9. Είναι επιπλέον απαραίτητο όπως αναφέρθηκε στην υποσημείωση να ισχύει στο x^o μία γεωμετρική "ιδιότητα των περιορισμών" και συγκεκριμένα σχετικά με τα διανύσματα $\nabla g_j(x^o)$, διαφορετικά είναι δυνατόν να έχουμε βέλτιστα όπου δεν ικανοποιούνται οι Συνθήκες Κ-Τ. Μία τέτοια περίπτωση δίνεται στα Παραδείγματα 10α και 10β, όπου επεξηγείται περισσότερο η ιδιότητα αυτή.

Οι συνθήκες γράφονται σε ισοδύναμη μορφή με την χρήση της συνάρτησης Lagrange

$$\mathcal{L}(\underline{x},\underline{\mu}) = f(\underline{x}) + \sum_j \mu_j g_j(\underline{x}).$$

Συνθήκες Kuhn – Tucker σε μορφή Lagrange

Αν το x^o είναι βέλτιστο στο πρόβλημα κανονικής μορφής $max\ f(x),\ g_j(x) \geq 0$ θα πρέπει να υπάρχουν $\mu_j \geq 0$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

- $\partial\mathcal{L}/\partial x_i = \partial f(\underline{x}^o)/\partial x_i + \sum_j \mu_j\, \partial g_j(\underline{x}^o)/\partial x_i = 0$ για i=1,2,..,n.
- $\mu_j g_j(\underline{x}^o) = 0$ για j=1,2,.., k

και βέβαια το x^o να είναι εφικτό, δηλαδή

- $g_j(x^o) \geq 0$ για j=1,2,.., k

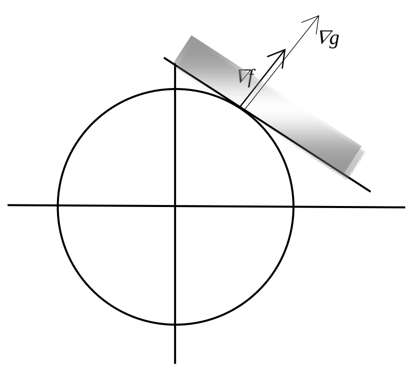
1.3. Εφαρμογές των συνθηκών Kuhn - Tucker

Παράδειγμα 1:

Έστω το πρόβλημα

Min x^2+y^2

$x+y \geq 1$



Στο βέλτιστο, τα ∇f και ∇g πρέπει να είναι συγγραμικά και ίδιας κατεύθυνσης. Διαφορετικά, αν κινούμαστε κατά το ∇g θα είχαμε επιτρεπτή μετακίνηση που θα μείωνε την f. Άτοπο για βέλτιστο!

Για να αναγάγουμε το πρόβλημα στην κανονική μορφή, εξετάζουμε το ισοδύναμο

$max(-x^2-y^2) = -min\ x^2+y^2$

$x+y-1 \geq 0$

Άρα έχουμε την συνάρτηση Lagrange $L=-x^2-y^2+\mu(x+y-1)$και οι συνθήκες Kuhn Tucker είναι

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + \mu = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \mu = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow x = \mathrm{y} = {}^{\mu}/_{2}$$

Άρα αν $\mu>0$ από την σχέση συμπληρωματικότητας $\mu(x+y-1)=0$ συνεπάγεται ότι $x+y-1=0$ και εφόσον τα x,y ισούνται, είναι $x=y=1/2$. Αντίθετα, αν $\mu=0$ θα πρέπει $x=y=0$ από τις συνθήκες ΚΤ. Όμως οι τιμές αυτές των x,y δεν ικανοποιούν τον περιορισμό. Άρα η μόνη εφικτή λύση είναι αυτή που έχει $\mu>0$, και εφοσον $x=y=1/2=\mu/2$ έπεται ότι $\mu=1$. Αυτή είναι και η μόνη λύση των συνθηκών ΚΤ □

Αν στο προηγούμενο πρόβλημα προσθέσουμε τον περιορισμό $x+2y\geq1$, τότε προφανώς η λύση δεν αλλάζει. Τότε ο πολλαπλασιαστής του περιορισμού αυτού θα είναι βέβαια μηδενικός!

Παράδειγμα 2:

Το πρόβλημα max x^2+y^2 με $x+y\geq 1$ έχει Λαγκρανζιανή $L= x^2+y^2 +\mu(x+y-1)$

Εύκολα προκύπτει ότι $x=y=-\mu/2$ (γιατί;). Αν $\mu>0$ θα είναι $x=y=1/2$ εφόσον από την συμπληρωματικότητα $\mu(x+y-1)=0$ προκύπτει $x+y=1$ ενώ τα x,y είναι ίσα. Ισχύει όμως ότι $x=y=-\mu/2<0$, που είναι άτοπο. Άρα αν υπάρχει λύση αυτή θα προκύψει για $\mu=0$, οπότε πρέπει $x=y=0$. Και αυτό όμως είναι ασυμβίβαστο με το ζητούμενο $x+y\geq 1$. Προκύπτει λοιπόν ότι δεν υπάρχουν τιμές των x,y,μ που να ικανοποιούν τις συνθήκες μεγίστου. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί στο δεδομένο πρόβλημα δεν υπάρχει μέγιστο, καθώς αυθαίρετα μεγάλες τιμές των μεταβλητών είναι αποδεκτές. □

Παράδειγμα 3:

Έστω το πρόβλημα

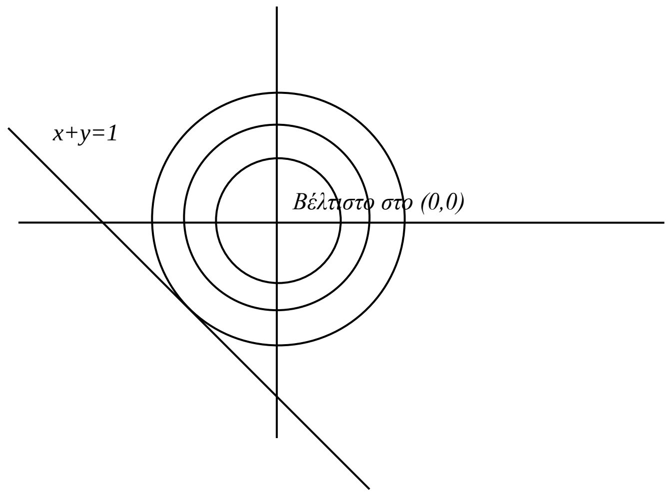
$$\min x^2+y^2 \quad \text{με } x+y\geq -1$$

Ο περιορισμός γράφεται ισοδύναμα $x+y+1\geq 0$, και έχουμε πάλι $L=-x^2-y^2+\mu(x+y+1)$ Οι συνθήκες K-T λένε ότι υπάρχει στο ελάχιστο x^o, y^o ένας αριθμός $\mu\geq 0$ ώστε

(α) $\partial L/\partial x = -2x+\mu=0$ και $\partial L/\partial y = -2y+\mu=0$

(β) $\mu(x^o+ y^o +1) = 0$

Αν είναι $\mu>0$, από το (α) έχουμε $x=y=\mu/2>0$ και λόγω του (β) θα πρέπει $x+y+1=0$, πού όμως είναι άτοπο. Άρα διερευνούμε λύσεις για $\mu=0$, οπότε λόγω του (α), είναι $x=y=0=\mu$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που θα προέκυπτε αν είχαμε να βρούμε ακρότατο χωρίς ανισοτικούς περιορισμούς. Έχουμε δηλαδή μία περίπτωση αναποτελεσματικών περιορισμών, οπότε οι συνθήκες ΚΤ ανάγονται σε ισοτικές συνθήκες Lagrange. Βλέπε το παρακάτω σχήμα



Παράδειγμα 4:

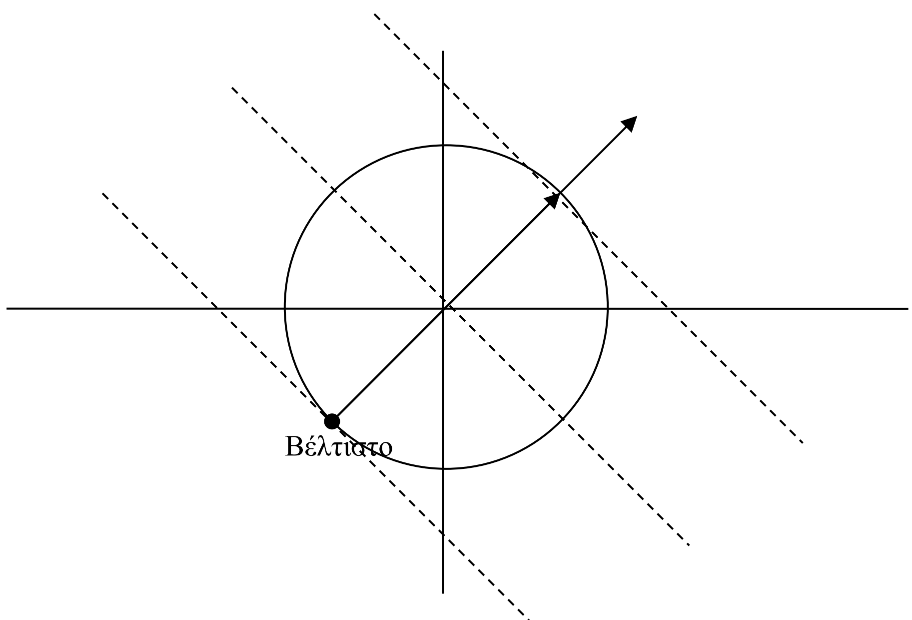
Min $x+y$ με $1-(x^2+y^2)\geq 0$

Θέτουμε $\mathcal{L} = -x - y + \mu[1-(x^2+y^2)]$ για $\mu\geq 0$. Πρέπει να είναι για βέλτιστο:

(α) $\partial\mathcal{L}/\partial x = -1-2\mu x=0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = -1-2\mu y=0$

(β) $\mu(1-(x^2+y^2)) = 0$

Από το (α) φαίνεται ότι δεν μπορεί να είναι μ=0. Άρα είναι μ>0, οπότε από το (α) $x=y=-1/2\mu$ που είναι αρνητικά. Εφόσον μ>0, πρέπει ο περιορισμός να είναι αποτελεσματικός δηλαδή $1= x^2+y^2$ και άρα $x=y=-1/\sqrt{2}$. Επομένως είναι $\mu=1/\sqrt{2}$.



Παράδειγμα 5:

Max $x+y$ με $1-(x^2+y^2) \geq 0$

Θέτουμε $\mathcal{L} = x + y + \mu[1-(x^2+y^2)]$ με $\mu \geq 0$ και οι συνθήκες είναι:

(α) $\partial \mathcal{L}/\partial x = 1-2\mu x=0$ και $\partial \mathcal{L}/\partial y = 1-2\mu y=0$

(β) $\mu(1-(x^2+y^2)) = 0$

Πάλι η περίπτωση μ=0 απορρίπτεται οπότε είναι μ>0, και από το (α): x=y=1/(2μ), που είναι θετικά. Εφόσον μ>0, πρέπει ο περιορισμός να είναι αποτελεσματικός δηλαδή $1= x^2+y^2$ και άρα $x=y=1/\sqrt{2}$. Επομένως είναι $\mu=1/\sqrt{2}$. Παράβαλε με το Παράδειγμα 4. □

Παράδειγμα 6:

Min $x+y$ με $1-(x^2+y^2) \geq 0$ και $y \geq 0$

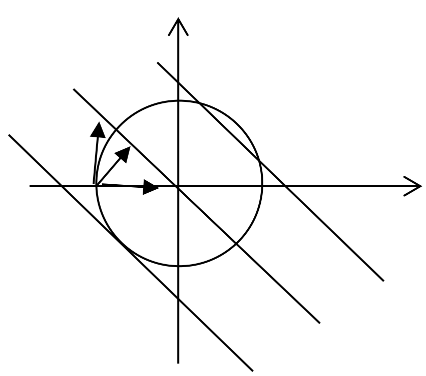
Έχουμε $\mathcal{L} = -x-y+ \mu_1 [1-(x^2+y^2)] + \mu_2 y$, με μ_1 και $\mu_2 \geq 0$.

Οι συνθήκες είναι

(α) $\partial\mathcal{L}/\partial x = -1-2\mu_1 x=0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = -1-2\mu_1 y+\mu_2=0$

(β) $\mu_1(1-(x^2+y^2)) = 0$ και $\mu_2 y = 0$

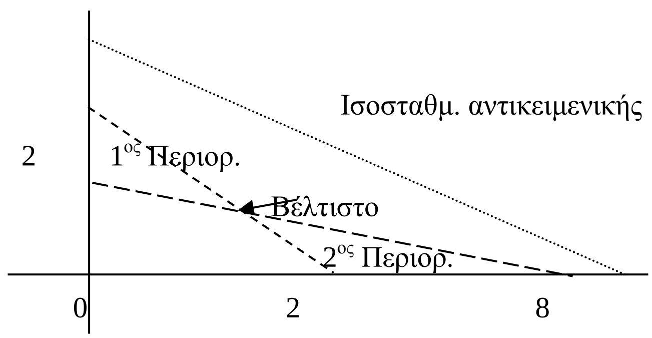
Είναι πάλι $\mu_1>0$, διαφορετικά -1=0 από την πρώτη σχέση της (α). Αν τώρα $\mu_2=0$, από την δεύτερη σχέση της (α) προκύπτει ότι $1 = -2\mu_1 y$ που όμως μας δίνει y αρνητικό και μη αποδεκτό λόγω του περιορισμού $y \geq 0$. Αρα το μ_2 είναι αυστηρά θετικό και επομένως y=0. Από την σχέση $1=-2\mu_1 x$ της (α) έπεται ότι $\mu_1>0$ και άρα $1-x^2-y^2 = 1-x^2 = 0$ οπότε $x^2 = 1$ και $x = \pm 1$. Αλλά $x =-1/2\mu_1 <0$ και επομένως x =-1. Επομένως είναι $\mu_1 =1/2$ και από την σχέση $1 = -2\mu_1 y+\mu_2$ έπεται ότι $\mu_2=1$. Βλέπε Σχήμα 6. Στο σημείο (-1,0) έχουμε $\nabla g_1=(-2x,-2y) = (2,0)$ ενώ $\nabla g_2=(0,1)$. Έχουμε τέλος $-\nabla f=(1,1)$ και ισχύει όντως ότι $\nabla f + \mu_1\nabla g_1+\mu_2\nabla g_2 =0$ για τις παραπάνω τιμές των $\mu_1, \nabla g_1$, μ_2 και ∇g_2. Παρατηρήστε ότι στο (-1,0) ικανοποιούνται ισοτικά και οι δύο περιορισμοί.



Παράδειγμα 7: (Επιβεβαίωση)

Οι συνθήκες Kuhn Tucker μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιβεβαιώσουν ότι ένα δεδομένο σημείο είναι ή δεν είναι το βέλτιστο ενός προβλήματος. Η εργασία αυτή είναι αρκετά απλούστερη από το να εντοπισθούν όλες οι λύσεις των συνθηκών Kuhn Tucker.

Έστω λοιπόν το πρόβλημα max 3x+4y με περιορισμούς $x+y\leq 2$, $x+8y\leq 8$, $x,y\geq 0$. Διαγραμματικά βλέπουμε πώς το βέλτιστο είναι στο x=8/7 y=6/7. Πώς επιβεβαιώνουμε ότι όντως το σημείο αυτό είναι βέλτιστο;



Θέτουμε $\mathcal{L} = 3x+4y+ \mu_1 [2-x-y] + \mu_2[8-x-8y]+ \mu_3 x + \mu_4 y$ με $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0$.

Οι συνθήκες βελτιστοποίησης είναι:

(α) $\partial\mathcal{L}/\partial x = 3-\mu_1- \mu_2+ \mu_3=0$ *και* $\partial\mathcal{L}/\partial y = 4-\mu_1-8\mu_2+ \mu_4=0$

(β) $\mu_1 [2-x-y] =0 \quad \mu_2[8-x-8y]=0 \quad \mu_3 x=0 \quad \mu_4 y=0$

Αν $x=8/7$ $y=6/7$, θα είναι $\mu_3= \mu_4=0$ οπότε οι σχέσεις (α) γίνονται ένα σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους $\mu_1+ \mu_2=3$ και $\mu_1+8\mu_2=4$ που έχει μοναδική λύση $\mu_1=20/7$ και $\mu_2=1/7$. Τα μ που εντοπίσθηκαν με τον τρόπο αυτό είναι μη αρνητικά, οπότε οι συνθήκες Kuhn Tucker ικανοποιούνται κατ' αρχήν – πράγμα που δεν θα συνέβαινε αν η λύση στο σύστημα προέκυπτε αρνητική. Πρέπει όμως επιπλέον λόγω της θετικότητας των μ και των σχέσεων (β) να ισχύει και $2-x-y = 8-x-8y =0$, που επιβεβαιώνονται για τις συγκεκριμένες τιμές των x,y.

Μία άλλη κορυφή στο διάγραμμα των περιορισμών είναι η $x=0$, $y=1$. Εξετάζουμε αν στο σημείο αυτό ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτίστου. Για τις τιμές αυτές θα είναι $\mu_4=0$ και επιπλέον καθώς η $x+y\leq 2$ ικανοποιείται ανισοτικά, θα πρέπει $\mu_1=0$ λόγω της πρώτης σχέσης στις (β). Έτσι οι σχέσεις (α) γίνονται πάλι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και συγκεκριμένα $3-\mu_2+\mu_3=0$, $4-$

$8\mu_2=0$. Η λύση των είναι $\mu_2=1/2$ και $\mu_3=-5/2$, πράγμα που σημαίνει ότι οι συνθήκες ΔΕΝ ικανοποιούνται.

□

<u>Παράδειγμα 8:</u> (Επιβεβαίωση)

Έστω το πρόβλημα $max\ x^2+3y^2$ με περιορισμούς $x+y\leq 2,\ x+8y\leq 8,\ x,y\geq 0$.

Οι περιορισμοί είναι οι ίδιοι όπως προηγουμένως, αλλά από την διαγραμματική παράσταση δεν είναι σαφές που θα είναι το βέλτιστο, δεδομένου ότι οι ισοσταθμικές της αντικειμενικής δεν είναι γραμμικές. Από το διάγραμμα φαίνεται πάντως ότι τα υποψήφια βέλτιστα είναι στις κορυφές του σχήματος, δηλαδή (i) x=y=0 (ii) x=8/7 y=6/7 (iii) x=2 y=0 και (iv) x=0 y=1.

Θέτουμε $\mathcal{L} = x^2+3y^2 + \mu_1 [2-x-y] + \mu_2[8-x-8y]+ \mu_3 x + \mu_4 y$ με $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0$.

Οι συνθήκες βελτιστοποίησης είναι:

$(\alpha)\ \partial\mathcal{L}/\partial x = 2x-\mu_1- \mu_2+ \mu_3=0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = 6y-\mu_1-8\mu_2+ \mu_4=0$

$(\beta)\ \mu_1 [2-x-y] =0 \quad \mu_2[8-x-8y]=0 \quad \mu_3 x=0 \quad \mu_4 y=0$

Στο (i) είναι $\mu_1= \mu_2=0$ και από την (α) έπεται ότι $\mu_3= \mu_4=0$ και οι συνθήκες ικανοποιούνται, αν και το σημείο (i) δεν έχει κανένα ενδιαφέρον από πλευράς βελτιστοποίησης.

Στο (ii) είναι $\mu_3= \mu_4=0$ οπότε η (α) γίνεται $16/7 = \mu_1+ \mu_2$ και $36/7 = \mu_1+8\mu_2$. Λύνοντάς τις προκύπτει $\mu_1= 92/49$, $\mu_2=20/49$ που είναι αποδεκτές καθώς οι γραμμικοί περιορισμοί ικανοποιούνται ισοτικά.

Στο (iii) είναι $\mu_2= \mu_3=0$ οπότε η (α) γίνεται $4-\mu_1=0$ και $\mu_1=\mu_4$ οπότε είναι $\mu_1=\mu_4=4$, που είναι παραδεκτό.

Στο (iv) είναι $\mu_1= \mu_4=0$ οπότε η (α) δίνει ένα σύστημα εξισώσεων ως προς μ_2 και μ_3 με λύση $\mu_2=\mu_3=3/4$ που επίσης ικανοποιεί τις συνθήκες βέλτιστου.

Από τα 4 σημεία αυτά, η τιμή της αντικειμενικής στο (i) είναι 0, στο (ii) είναι 3.510 , στο (iii) είναι 4, και τέλος στο (iv) είναι 3. Άρα το καθολικό βέλτιστο είναι το σημείο (iii). Τα παραπάνω μας δείχνουν ότι η ικανοποίηση των συνθηκών Kuhn Tucker είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για συνολικό βέλτιστο. Κάτω από συνθήκες κυρτότητας είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες είναι και ικανές, ενώ αν υπάρξουν πρόσθετες συνθήκες δεύτερης τάξης τότε ένα οποιοδήποτε σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι τοπικό αλλά όχι ολικό βέλτιστο. Το ίδιο θέμα εμφανίζεται και στο επόμενο παράδειγμα. □

<u>Παράδειγμα 9</u>: (Οι συνθήκες Κ-Τ είναι αναγκαίες αλλά όχι ικανές)

Έστω το πρόβλημα $max\ x +y$ με περιορισμό $x^2+y^2 \geq 1$.

Θέτουμε $\mathcal{L} = x +y + \mu[x^2+y^2 -1]$ με $\mu\geq 0$ και οι συνθήκες είναι:

$(\alpha)\ \partial\mathcal{L}/\partial x = 1+2\mu x=0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = 1+2\mu y=0$

(β) $\mu(x^2+y^2-1) = 0$

Για να ικανοποιούνται οι K-T θα πρέπει να είναι μ>0, και από το (α) x = y = -1/(2μ) που είναι αρνητικά. Εφόσον μ>0, πρέπει ο περιορισμός να είναι αποτελεσματικός δηλαδή $1 = x^2+y^2$ και άρα x = y = -1/√2. και μ=1/√2. Όμως είναι τελείως προφανές ότι το σημείο (-1/√2 , -1/√2) δεν είναι ούτε τοπικό ούτε και φυσικά ολικό βέλτιστο. Μάλιστα δεν υπάρχει ολικό βέλτιστο καθώς ο περιορισμός δεν αποκλείει απεριόριστη αύξηση των x,y και έτσι δίνουν στην αντικειμενικά απείρως μεγάλες τιμές. Επίσης, μετακινούμενοι κατά την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου κοντά στο σημείο (-1/√2, -1/√2) επιτυγχάνουμε αύξηση της αντικειμενικής, και άρα δεν έχουμε ούτε καν τοπικό βέλτιστο. □

<u>Παράδειγμα 10α:</u> (Οι συνθήκες K-T δεν είναι καν αναγκαίες σε ακραίες περιπτώσεις)

Έστω το πρόβλημα **max x-y με περιορισμούς y≥0 και $-x^3$-y≥0**.

Το x δεν μπορεί να πάρει θετικές τιμές (γιατί;) όποτε το προφανές βέλτιστο είναι στο x=y=0. Για το πρόβλημα αυτό οι συνθήκες K-T είναι $\mathcal{L} = x - y + \lambda y + \mu[-x^3-y]$ και $\partial\mathcal{L}/\partial x = 1-3\mu x^2 = 0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = -1+(\lambda-\mu) = 0$. Προφανώς η πρώτη ισότητα δεν ικανοποιείται στο x=0, και άρα παρόλο που το σημείο (0,0) είναι βέλτιστο ΔΕΝ ικανοποιεί τις υποτιθέμενες αναγκαίες συνθήκες K-T.

Το πρόβλημα αυτό παρατηρείται διότι δεν ισχύει η επιπλέον "**ιδιότητα των περιορισμών**" που αναφέρθηκε στην θεωρία. Η ιδιότητα αυτή περίπου απαιτεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα κλίσης των αποτελεσματικών περιορισμών, και τότε όντως οι συνθήκες K-T είναι αναγκαίες. Αυτό φαίνεται και στο παράδειγμα 10β, όπου μία απειροελάχιστη αλλαγή στους περιορισμούς οδηγεί σε βέλτιστο όπου ικανοποιούνται οι συνθήκες K-T, καθώς τα σχετικά διανύσματα κλίσεως είναι ανεξάρτητα. □

<u>Παράδειγμα 10β:</u> (Οι συνθήκες K-T είναι αναγκαίες αν ισχύει η ιδιότητα των περιορισμών*)*

Έστω το πρόβλημα **max x-y με περιορισμούς y≥εx και $-x^3$-y≥0**, με ε ένα πολύ μικρό θετικό αριθμό (οπότε ο πρώτος περιορισμός αντιστοιχεί περίπου με τον y≥0 που είχαμε στο προηγούμενο παράδειγμα).

Πάλι το x δεν μπορεί να πάρει θετικές τιμές (γιατί;) και το βέλτιστο είναι πάλι στο x=y=0. Για το πρόβλημα αυτό είναι $\mathcal{L} = x - y + \lambda[y-\varepsilon x] + \mu[-x^3-y]$ και οι συνθήκες K-T είναι:

$\partial\mathcal{L}/\partial x = 1\text{-le-}3mx^2 = 0$ και $\partial\mathcal{L}/\partial y = -1+(l-m) = 0$.

Στο x=0 οι συνθήκες ικανοποιούνται με λ=1/ε και μ=-1+1/ε. Τα διανύσματα βαθμίδας στο πρόβλημα αυτό είναι (ε,1) και (0,-1) που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αντίθετα, στο παράδειγμα 10α τα διανύσματα βαθμίδος είναι (0,1) και (0,-1) που είναι εξαρτημένα. □

Μία πολύ καλή (αλλά προχωρημένη) παρουσίαση των ιδιοτήτων περιορισμών δίνεται στο βιβλίο του P. Varaiya <u>Notes on Optimization</u> που είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο (Κεφ. V.1).

Κεφάλαιο 2. Γραμμικός Προγραμματισμός

2.1. Εισαγωγή - Η μέθοδος Simplex

Θεωρούμε τη γενική περίπτωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης Μαθηματικού Προγραμματισμού:

$$\min \text{ ή } \max f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in R^n$$

έτσι ώστε να ισχύουν και οι k ανισότητες

$$g_1(\underline{x}) \geq 0,\ g_2(\underline{x}) \geq 0,\ \ldots,\ g_k(\underline{x}) \geq 0$$

Σε περίπτωση που τόσο η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x})$ όσο και οι συναρτήσεις $g_1(\underline{x})$, $g_2(\underline{x})$, …, $g_k(\underline{x})$ είναι γραμμικές τότε το πρόβλημα του Μαθηματικού Προγραμματισμού είναι γνωστό ως Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ). Συγκεκριμένα, αν $f(\underline{x}) = \sum_j c_j x_j$ $j=1,..,n$ και $g_k(\underline{x}) = \sum_j \alpha_{kj} x_j - \beta_k$, το γραμμικό πρόβλημα (ΓΠ) γράφεται είτε σε μορφή πινάκων (μητρών) είτε αθροισμάτων ως:

Πίνακες - Μήτρες	Αθροίσματα
$\max c'x$	$\max \sum_j c_j x_j$
$Ax \leq \beta$	$\sum_j \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i \quad i=1,2,..,k$

όπου η διανυσματική ανισότητα $(x_1,..,x_n) \geq (y_1,..,y_n)$ σημαίνει $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$.

Ένα διάνυσμα $\underline{x}^*$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς $A\underline{x} \leq \beta$ ονομάζεται λύση του προβλήματος ΓΠ, ενώ αν ισχύει και η παραπάνω διανυσματική ανισότητα τότε ονομάζεται εφικτή λύση. Αν τέλος για κάθε άλλη εφικτή λύση x, ισχύει ότι $c'\underline{x} > c'\underline{x}^*$ (για min πρόβλημα) ή $c'\underline{x} < c'\underline{x}^*$ (για max πρόβλημα) , τότε το $\underline{x}^*$ ονομάζεται βέλτιστη εφικτή λύση (ή βέλτιστη λύση). Η εύρεση μιας βέλτιστης λύσης είναι και το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα Γ.Π.

Η επίλυση των προβλημάτων ΓΠ μπορεί να γίνει αποτελεσματικά με την μέθοδο - αλγόριθμο που είναι γνωστή ως Simplex. Οφείλεται στους G. Dantzig και L. Kantorovitz, και αναπτύχθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1940[2]. Η μέθοδος θα εξηγηθεί με βάση το παρακάτω παράδειγμα:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

με περιορισμούς

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5$$

[2] Η μέθοδος Simplex είναι πολύ αποτελεσματική για τυπικά προβλήματα. Μπορούν όμως να κατασκευασθούν προβλήματα στα οποία απαιτεί αριθμό βημάτων εκθετικό ως προς το μέγεθος του προβλήματος. Έχουν από το 1970 αναπτυχθεί μέθοδοι που εγγυημένα απαιτούν πολυωνυμικό αριθμό βημάτων, που όμως είναι δυσκολότερο να διατυπωθούν. Βλέπε Παπαδημητρίου - Steiglitz.

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Στην μέθοδο Simplex θεωρούμε ότι όλες οι μεταβλητές παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Επίσης θεωρούμε ότι οι περιορισμοί που είναι κατ' αρχήν ανισοτικοί, μπορούν να μετατραπούν σε ισοτικούς περιορισμούς με προσθήκη κατάλληλων πρόσθετων μη αρνητικών μεταβλητών, που θα ονομάζουμε μεταβλητές απόκλισης. Τέλος, προς χάριν των παραδειγμάτων που ακολουθούν, θεωρούμε ότι έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης. Έτσι φέρνουμε με κατάλληλες τροποποιήσεις το ΓΠ στη μορφή:

$max\ c'\underline{x}$

$A\underline{x} = \beta$

$\underline{x} \ge 0$

Στο προηγούμενο παράδειγμα εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα:

$max\ z = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$

με περιορισμούς

$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 5$

$x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

που γράφεται συνοπτικά στον παρακάτω Πίνακα Γραμμή αντικειμενικής συνάρτησης Συντελεστών:

4	3	0	0	z	*Αντικειμενική συνάρτηση*
3	2	1	0	5	
1	1	0	1	2	*Γραμμές περιορισμών*
x_1	x_2	x_3	x_4		

Οι μεταβλητές x_3,x_4 αντιστοιχούν σε στήλες του πίνακα των περιορισμών που αποτελούν μία ταυτοτική μήτρα (μοναδιαίος πίνακας). Αν θέσουμε $x_1=x_2=0$ τότε θα πρέπει $x_3=5$ και $x_4=2$. Μία εφικτή λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) τέτοια ώστε μόνο δύο μεταβλητές να έχουν μη αρνητικές τιμές και οι άλλες να είναι ακριβώς 0 θα λέγεται βασική λύση σε περίπτωση που επιπλέον οι στήλες της A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές μεταβλητές είναι οι στήλες μιας ταυτοτικής μήτρας, ενδεχομένως σε μετάθεση. Οι μη μηδενικές μεταβλητές μίας βασικής λύσης θα ονομάζονται βασικές μεταβλητές[3]. Η λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,5,2)$ είναι βασική λύση με βασικές μεταβλητές τις x_3, x_4 (όσες και οι περιορισμοί). Παρατηρούμε επίσης στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα ότι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές μεταβλητές είναι 0, άρα οι τιμή

[3] Ενδέχεται να υπάρχει βασική λύση όπου κάποια ή κάποιες βασικές μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές.

της αντικειμενικής συνάρτησης στην λύση (0,0,5,2) είναι 0, ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι θετικοί.

Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι είχαμε μία βασική λύση και ότι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ήταν μηδενικοί για τις βασικές μεταβλητές και αρνητικοί (μη θετικοί) για τις υπόλοιπες μεταβλητές. Τότε προκύπτει εύκολα ότι η βασική αυτή λύση είναι βέλτιστη! Και αυτό γιατί αν άλλαζαν οι τιμές των μεταβλητών προς μία άλλη εφικτή λύση, τότε οι μη βασικές μεταβλητές θα έπαιρναν βέβαια μη αρνητικές τιμές, και άρα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα ήταν αρνητική, δηλαδή χειρότερη από την τρέχουσα τιμή που είναι η μηδενική. Άρα κάθε λύση των ανισοτήτων θα έδινε αρνητική τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση πλην της βασικής λύσης που υποτίθεται ότι έχουμε βρει και για την οποία η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την τιμή μηδέν. Η φιλοσοφία της μεθόδου επίλυσης Simplex[4] είναι να προχωρήσει από μία αρχική βασική λύση των περιορισμών σε μία άλλη καλύτερη βασική λύση έτσι ώστε σταδιακά οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης να μετατραπούν σε αρνητικούς αριθμούς (ή σε θετικούς όταν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης), οπότε και η διαδικασία τελειώνει έχοντας βρει το βέλτιστο. Θα δείξουμε τον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου αυτής στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα.

Έχοντας αρχίσει από κάποια αυθαίρετη βασική λύση (το πώς βρίσκεται αυτή η λύση θα μας απασχολήσει αργότερα), η μέθοδος προχωρά επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε μη αρνητικό συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης[5]. Στο παράδειγμά μας έστω ότι επιλέγεται ο συντελεστής 4 που αντιστοιχεί στην x_1. Αν δώσουμε μη μηδενική τιμή στην x_1 κρατώντας την x_2 στο μηδέν, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνει. Το ερώτημα τίθεται πόσο μπορούμε να αυξήσουμε την x_1 έτσι ώστε η x_2 να παραμείνει μηδενική ενώ οι x_3, x_4 να μην γίνουν αρνητικές; Όμως, από τις εξισώσεις των περιορισμών θα πρέπει $3x_1+x_3=5$, $x_1+x_4=2$ ή $0 \leq x_3 \leq 5-3x_1$ και $0 \leq x_4 \leq 2-x_1$ ή $x_1 \leq 5/3$ και ταυτόχρονα $x_1 \leq 2$. Από τους δύο αυτούς περιορισμούς στο x_1 πιο δεσμευτικός είναι ο $x_1 \leq 5/3$ και άρα η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η μεταβλητή x_1 είναι όντως 5/3, οπότε θα πρέπει και $x_2=0$,

---

[1] Η μέθοδος Simplex είναι πολύ αποτελεσματική για τυχαίο πρόβλημα. Μπορούν όμως να κατασκευασθούν προβλήματα στα οποία απαιτεί αριθμό βημάτων εκθετικό ως προς το μέγεθος του προβλήματος. Έχουν από το 1970 αναπτυχθεί μέθοδοι που εγγυημένα απαιτούν πολυνωνυμικό αριθμό βημάτων, που όμως είνα δυσκολοτερο να διατυπωθούν. Βλέπε Παπαδημητρίου - Steiglitz.

[4] Το Simplex αναφέρεται στην ελληνική μαθηματική ορολογία ως Απλοειδές, που είναι γενικά ένα κυρτό σχήμα με σύνορο που αποτελείται από επίπεδες όψεις. Τα απλοειδή παίζουν σημαντικό ρόλο στην γενικευμένη γεωμετρία - τοπολογία.

[5] Υπάρχουν αρκετοί εμπειρικοί κανόνες επιλογής στήλης, αλλά κανένας δεν υπερτερεί γενικά. Βλέπε Παπαδημητρίου Steiglitz.

x_3=0, x_4=1/3, Η λύση (5/3, 0, 0, 1/3) είναι μία νέα βασική λύση που προκύπτει από τον αρχικό πίνακα κάνοντας πράξεις γραμμών έτσι ώστε η πρώτη στήλη του πίνακα $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ να γίνει $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ως εξής:

(*1/3)

-1

3	2	1	0	5
1	1	0	1	2
x_1	x_2	x_3	x_4	

→

1	2/3	1/3	0	5/3
0	1/3	-1/3	1	1/3
x_1	x_2	x_3	x_4	

Οι στήλες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές x_1, x_4 είναι στήλες ταυτοτικού πίνακα. Μπορούμε τώρα να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τις γραμμές που αντιστοιχούν στις εξισώσεις περιορισμών στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης, έτσι ώστε ο συντελεστής της μεταβλητής x_1 να μηδενιστεί. Έτσι έχουμε

-4

4	3	0	0	z
1	2/3	1/3	0	5/3
0	1/3	-1/3	1	1/3
x_1	x_2	x_3	x_4	

→

0	1/3	-4/3	0	z -20/3
1	2/3	1/3	0	5/3
0	1/3	-1/3	1	1/3
x_1	x_2	x_3	x_4	

Το νέο πρόβλημα έχει νέα αντικειμενική συνάρτηση $\bar{z}$ = z -20/3 με συντελεστές (0,1/3,-4/3,0). Αλλά είναι $\bar{z}$ = z - 20/3 εφόσον προσθέσαμε στην αντικειμενική συνάρτηση z την πρώτη γραμμή των περιορισμών πολλαπλασιασμένη επί (-4). Αν τώρα οι μεταβλητές πάρουν τις τιμές (5/3, 0, 0, 1/3) θα είναι $\bar{z}$ =0 ή z - 20/3 = 0 ή τελικά z =20/3, που είναι και η τιμή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης για την τιμή (5/3, 0, 0, 1/3) των μεταβλητών. Συνήθως στον πίνακα της Simplex παραλείπουμε το σύμβολο z και λαμβάνουμε υπόψη ότι το τελευταίο στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το αρνητικό της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει για την συγκεκριμένη βασική λύση.

Ο παρακάτω πίνακας Simplex δείχνει ότι έχουμε πάλι ένα θετικό συντελεστή, που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_2. Πάλι με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπουμε την αντίστοιχη στήλη σε στήλη μοναδιαίας μήτρας. Η θέση όπου θα υπάρχει το 1 στην στήλη αυτή βρίσκεται όπως προηγουμένως εξετάζοντας τα στοιχεία $\left\{\frac{5/3}{2/3}, \frac{1/3}{1/3}\right\} = \left\{5/2, 1\right\}$ και επιλέγοντας το μικρότερο, δηλαδή το 1. Η αντίστοιχη γραμμή, δηλαδή η δεύτερη των περιορισμών θα έχει στην δεύτερη στήλη το στοιχείο 1/3 (τελευταίο στοιχείο της δεύτερης στήλης) που ονομάζεται και <u>σημείο εναλλαγής</u> (Pivot point). Η μέθοδος Simplex προχωρά με την μετατροπή της στήλης του σημείου εναλλαγής στο διάνυσμα $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ με κατάλληλες πράξεις γραμμών όπως φαίνεται παρακάτω:

	0	1/3	-4/3	0	z-20/3
-1 -2	1	2/3	1/3	0	5/3
(×3)	0	1/3	-1/3	1	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	

→

0	0	-1	-1	z-21/3
1	0	1	-2	1
0	1	-1	3	1
x_1	x_2	x_3	x_4	

Η λύση $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=x_4=0$ είναι βέλτιστη με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης -(-21/3) = 7. Η λύση αυτή είναι βέλτιστη εφόσον οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών της νέας αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρνητικοί. Αυτό δικαιολογείται ως εξής: Γράφουμε την εξίσωση που αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή του τελευταίου πίνακα, δηλαδή $-x_3-x_4=z-7$. Εφόσον όμως τα x_3, x_4 είναι μη αρνητικά, ισχύει ότι $0 \le x_3+x_4 = 7-z$ ή τελικά $z \le 7$. Παράλληλα όμως η βασική λύση $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=x_4=0$ που βρήκαμε δίνει τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ακριβώς το βέλτιστο 7, καθώς τα x_3,x_4 μηδενίζονται. Το επιχείρημα αυτό είναι γενικό και συγκεκριμένα το κριτήριο τερματισμού της μεθόδου είναι το να έχει καταλήξει σε πίνακα με μη θετικούς συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης στις μη βασικές μεταβλητές (ή μη αρνητικούς αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης).

2.2. Λεπτομερής περιγραφή της μεθόδου Simplex

Εξετάζουμε το <u>πρόβλημα</u> ΓΠ - Γραμμικού Προγραμματισμού με συμβολισμούς Γραμμικής Άλγεβρας

$$max\ z = c'\underline{x}$$

$$A\underline{x} = b$$

$$\underline{x} \equiv (x_1,..,x_n)' \geq 0 \quad ή\ x_i \geq 0\ γιά\ i = 1,2,..,n$$

όπου $c' \equiv (c_1,..,c_n)$ διάνυσμα γραμμής, ενώ $\underline{x} \equiv (x_1,..,x_n)'$ και $b \equiv (b_1,..,b_k)'$ διανύσματα στήλης, ενώ A: k×n, δηλαδή πίνακας με k γραμμές και n στήλες. Μία βασική λύση των εξισώσεων $A\underline{x} = b$ και των ανισοτήτων $\underline{x} \equiv (x_1,..,x_n)' \geq 0$ έχει k <u>βασικές μεταβλητές</u> $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk}$ τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες στήλες $j_1, j_2, ..., j_k$ του πίνακα A να σχηματίζουν έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Οι άλλες μεταβλητές x_j, με $j \neq j_i$ παίρνουν μηδενικές τιμές. Επιπλέον, οι βασικές μεταβλητές που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο πρέπει να είναι μη αρνητικές. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα k γραμμικών εξισώσεων με k αγνώστους θα πρέπει να έχει μη αρνητική λύση.

Έστω B ο k×k πίνακας με στήλες τις $j_1, j_2, ..., j_k$ στήλες της A. Εφόσον ο B είναι αντιστρέψιμος, γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα ότι με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μπορεί να μετατραπεί στον k×k ταυτοτικό πίνακα I. Επίσης το πρόβλημα δεν αλλάζει αν προσθέσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση z κάποιες από τις εξισώσεις του περιορισμού $A\,\underline{x} = b$ ή πολλαπλάσιά των, και ειδικότερα έτσι ώστε οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση να γίνουν όλοι μηδενικοί. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $\bar{z} = z - α$, όπου z η αρχική αντικειμενική συνάρτηση και α η σταθερά που προκύπτει από τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (λόγω των στοιχείων του b). Επίσης η $\bar{z} = \bar{c}\,\underline{x}$ όπου $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2,.., \bar{c}_n)$ έχει μηδενικά $\bar{c}_j$ γιά j που αντιστοιχεί σε βασική μεταβλητή. Αν τώρα δεν υπάρχει c_j θετικό, τότε η βασική λύση που βρήκαμε είναι βέλτιστη. Διαφορετικά, θεωρούμε κάποιο j για το οποίο το $\bar{c}_j$ είναι θετικό. Η αντίστοιχη μεταβλητή x_j δεν είναι βασική και άρα έχει μηδενική τιμή. Επομένως αν η x_j αυξηθεί με αντίστοιχη μείωση των βασικών μεταβλητών, και τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές να παραμένουν στο μηδέν, θα έχουμε μία αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η αύξηση αυτή περιορίζεται από την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η x_j χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί θετικότητας στις βασικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, έστω η i-στή εξίσωση, στην οποία αντιστοιχεί χωρίς απώλεια γενικότητας η βασική μεταβλητή x_i. Τότε λόγω της αναγωγής του πίνακα περιορισμών στον ταυτοτικό ως προς τις βασικές μεταβλητές, θα είναι $x_i + α_{ij}\, x_j = b_j$. Εφόσον η x_i είναι μη αρνητική, θα πρέπει $b_j \geq α_{ij}\, x_j$. Αν τώρα $α_{ij} \leq 0$, η προηγούμενη ανισότητα δεν επιβάλλει περιορισμούς στην αύξηση του x_j, αλλά αν $α_{ij} > 0$ το x_j περιορίζεται, και μάλιστα περιορίζεται για κάθε i με $\alpha_{ij} > 0$. Έτσι είναι $b_j \geq \alpha_{ij} x_j$ γιά κάθε i με $\alpha_{ij} > 0$, και επομένως η μέγιστη αύξηση στο x_j δίνεται από την παράσταση $min\left\{ {b_j}/{\alpha_{ij}} \,/\, για\ i\ με\ \alpha_{ij} > 0 \right\}$.

Η μέθοδος Simplex εξετάζει γιά ποιό i (δηλαδή ποιά γραμμή) ισχύει το ελάχιστο αυτό, και προχωρεί κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών έτσι ώστε το στοιχείο (i,j) να γίνει 1, τα δε άλλα στοιχεία στην ίδια στήλη να γίνουν μηδενικά.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν όλα τα στοιχεία $\alpha_{i,j}$ μίας στήλης που έχει θετικό συντελεστή αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρνητικά ή μηδέν, τότε η μεταβλητή x_j μπορεί να αυξηθεί χωρίς περιορισμό, οπότε το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένο μέγιστο. Λέμε επίσης ότι ή λύση του ΓΠ είναι $+\infty$.

Η μέθοδος Simplex τελειώνει όταν όλοι οι συντελεστές c στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης γίνουν μη θετικοί στις μη βασικές μεταβλητές, ενώ είναι από κατασκευής μηδενικοί στις βασικές μεταβλητές. Τότε, η βασική λύση στην οποία έχει καταλήξει η μέθοδος είναι και η βέλτιστη. Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο. Η πρώτη γραμμή σε μορφή εξίσωσης είναι της μορφής

$\sum_{j\,μη\,βασικές} \bar{c}_j x_j = z - \beta$ και εφόσον όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές θα είναι για οποιαδήποτε ανάθεση τιμών $z \leq \beta$, δηλαδή το β είναι άνω όριο στην αντικειμενική. Όμως στην λύση όπου κατέληξε η μέθοδος οι μη βασικές μεταβλητές είναι μηδενικές όπότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την τιμή β που είναι και το άνω όριο στην αντικειμενική συνάρτηση!

Βλέπουμε ότι η μέθοδος Simplex προχωρά από βασική σε βασική λύση, συνήθως αυξάνοντας την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εφόσον η μη βασική μεταβλητή που εισέρχεται παίρνει μη μηδενική τιμή. Έτσι σε κάθε βήμα της επισκέπτεται διαφορετική βασική λύση. Εφόσον λοιπόν οι βασικές λύσεις είναι πεπερασμένες, η μέθοδος θα τερματίσει σε κάποιο βήμα στην βέλτιστη βασική λύση. Ο αριθμός των βασικών λύσεων είναι μικρότερος του αριθμού $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (γιατί;), που όμως μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Όντως σε ειδικά κατασκευασμένα παραδείγματα η Simplex επισκέπτεται πολλές βασικές λύσεις και έτσι έχει εκθετική πολυπλοκότητα στην δυσμενέστερη περίπτωση. Νεώτερες αλλά πιο πολύπλοκες μέθοδοι (αναπτύχθηκαν μετά το 1976) έχουν πολυωνυμική συμπεριφορά, ενώ αντίθετα η Simplex έχει πολυωνυμική συμπεριφορά μόνο κατά μέσο όρο. Βλέπε το βιβλίο των Παπαδημητρίου-Steiglitz για λεπτομερέστερη παρουσίαση του θέματος.

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η Simplex συνήθως επισκέπτεται διαφορετική βασική λύση από βήμα σε βήμα. Σε ειδικές περιπτώσεις όμως ανακυκλώνει μεταξύ μίας ομάδας βασικών λύσεων και ενδέχεται να μην τερματίσει αν δεν απομακρυνθεί από την ομάδα αυτή (φαινόμενο cycling). Η απομάκρυνση αυτή μπορεί να εξασφαλισθεί αν οι μη βασικές λύσεις που είναι υποψήφιες να εισέλθουν σε μία βασική λύση εξετάζονται με προτεραιότητα. Βλέπε την παραουσίαση της αντικυκλικότητας πάλι στο σύγγραμμα των Παπαδημητρίου-Steiglitz.

2.3. Εύρεση αρχικής βασικής λύσης (Φάση Ι)

Ένα σημαντικό πρόβλημα που ενδέχεται να προκύψει είναι το πώς βρίσκεται μία αρχική βασική λύση - αν υπάρχει – ή πώς διαπιστώνεται ότι ενδεχομένως δεν υπάρχει καμμία βασική λύση, πράγμα που θα συμβεί αν οι περιορισμοί είναι ασύμβατοι (αδύνατο πρόβλημα). Ένα συνηθισμένο τέχνασμα για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού έχει ως εξής:

Έστω οι περιορισμοί $A\underline{x} = b$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $b \geq 0$, διότι διαφορετικά αν κάποιο bj ταν μικρότερο του μηδενός θα πολλαπλασιάζαμε την αντίστοιχη ισότητα - περιορισμό με -

Θεωρούμε τώρα το νέο βοηθητικό πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$min\ z = \Sigma_j yj = (1,1,..,1) \cdot (y_1,y_2,..,y_n)'$$

με περιορισμούς:

$$Ax + Iy = b$$

$$x,y \geq 0$$

όπου εισάγαμε τις μη αρνητικές βοηθητικές μεταβλητές $y_1, y_2, .., y_n \geq 0$.

Στο πρόβλημα αυτό, μία προφανής βασική λύση είναι η $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, κλπ και $\underline{x} = 0$. Στο πρόβλημα αυτό λοιπόν μπορεί να ξεκινήσει η Simplex εφόσον εντοπίσθηκε μία αρχική βασική λύση. Αν τώρα στο **αρχικό** πρόβλημα με περιορισμούς $A\underline{x} = b$ υπάρχει λύση έστω x_o, τότε η Simplex στο νέο πρόβλημα θα οδηγηθεί σε μία τελική βασική λύση με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 0, εφόσον τα y θα πάρουν τις μηδενικές τιμές και θα είναι μη βασικές μεταβλητές. Η Simplex επίσης θα καταλήξει σε τέτοιες τιμές για τα x που θα αντιστοιχούν σε βασική λύση και στο αρχικό πρόβλημα, καθώς οι αντίστοιχες στήλες του πίνακα A θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έχοντας εντοπίσει λοιπόν μία βασική λύση στο αρχικό πρόβλημα, μπορούμε να αποβάλουμε τις βοηθητικές μεταβλητές y, να εισαγάγουμε την αρχική αντικειμενική συνάρτηση και να προχωρήσουμε. Προσοχή πρέπει να δείξει κανείς στο ότι όταν αλλάξει η αντικειμενική συνάρτηση για να επανέλθουμε στο αρχικό πρόβλημα, για να προχωρήσει η μέθοδος θα πρέπει η αντικειμενική συνάρτηση να μεταβληθεί με πρόσθεση γραμμών περιορισμών (γραμμοπράξεις) έτσι ώστε τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές να έχουν μηδενικές τιμές. Βλ. το Παράδειγμα 2 στο επόμενο εδάφιο. Η μέθοδος αυτή για την εύρεση αρχικής βασικής λύσης επεξηγείται και στα παρακάτω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Να βρεθεί μία βασική λύση των ανισοτήτων

$x_1+x_2 \ \geq 2$

$x_1- x_2 \ \leq -1$

$x_1,x_2 \ \geq 0$

Εισάγουμε τις μη αρνητικές μεταβλητές αποκλίσεως $x_3,x_4\geq 0$ οπότε το σύστημα ανισοτήτων μετατρέπεται σε σύστημα εξισώσεων

$$x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 2$$
$$x_1 - x_2 \qquad + x_4 = -1$$

με $x_1,x_2,x_3,x_4 \ \geq 0$.

ή πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη εξίσωση με -1

$$x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 2$$
$$-x_1 + x_2 \qquad -x_4 = 1$$

με $x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$.

Για να βρούμε αν υπάρχει λύση στο σύστημα εισάγουμε τις πρόσθετες μεταβλητές $x_5,x_6\geq 0$ και θεωρούμε το πρόβλημα ΓΠ:

$$min \ x_5 + x_6 \ \ ή \ \ max \ -x_5 - x_6$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad = 2$$
$$-x_1 + x_2 \qquad -x_4 \qquad + x_6 = 1$$

με $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 \geq 0$.

Η προφανής βασική λύση είναι $x_5 = 2$, $x_6 = 1$ και x=0 διαφορετικά, οπότε η εφαρμογή της Simplex προχωρά κανονικά και δίνεται στους παρακάτω πίνακες

Στήλη Εναλλαγής

	0	0	0	0	-1	-1	0
+1 +1	1	1	-1	0	1	0	2
	-1	1	0	-1	0	1	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5	

→

0	2	-1	-1	0	0	+3	
1	1	-1	0	1	0	2	-1 -2
-1	1	0	-1	0	1	1	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5		

Στήλη Εναλλαγής

	2	0	-1	1	0	-2	1
-1	2	0	-1	1	1	-1	1
+1	-1	1	0	-1	0	1	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5	

→

0	0	0	0	-1	-1	0
2	0	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	0	1	0	2
x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5	

Η τελική λύση είναι $x_2 = 2$ $x_4 = 1$ ενώ τα άλλα x είναι 0. Άρα μία βασική λύση του αρχικού προβλήματος βρίσκεται παίρνοντας τις τέσσερεις πρώτες στήλες του παραπάνω πίνακα. Έτσι έχουμε τους ισοδύναμους περιορισμούς για το αρχικό πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
&2x_1 \quad - x_3 + x_4 = 1 \\
&x_1 + x_2 - x_3 \qquad\;\; = 2 \qquad \mu\varepsilon\ \ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

που έχει την προφανή βασική λύση $x_2 = 2$ $x_4 = 1$ ενώ τα άλλα x είναι 0. Είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι σχέσεις αυτές προέρχονται από πράξεις γραμμών επί των αρχικών εξισώσεων, και συγκεκριμένα η δεύτερη εξίσωση παραπάνω είναι η πρώτη των αρχικών εξισώσεων, ενώ η πρώτη εξίσωση παραπάνω είναι το άθροισμα των δύο αρχικών εξισώσεων. □

Γενικά, αν σε ένα πρόβλημα μας δίνεται μία αρχική βασική λύση θα πρέπει προτού αρχίσουμε τα βήματα βελτίωσης της λύσης με pivoting (α) να μετατρέψουμε τους συντελεστές περιορισμών των βασικών μεταβλητών έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε ταυτοτικό πίνακα και κατόπιν (β) να <u>μηδενίσουμε</u> τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές. Αυτά θα γίνουν με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Βλέπε το Παράδειγμα 2 στο επόμενο εδάφιο.

Μία κατ' ευθείαν μέθοδος επίλυσης του προβλήματος ***max z=cx, Ax=b, x≥0***, όπου δεν είναι προφανής αρχική βασική λύση είναι η εξής.

Χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι b≥0. Προσθέτουμε στο πρόβλημα μεταβλητές *y≥0* που υπεισέρχονται με συντελεστές ταυτοτικού πίνακα στους περιορισμούς. Έτσι οι περιορισμοί γίνονται *Ax+Iy=b*, πράγμα που δείχνει ότι μια βασική λύση είναι η x=0, y=b≥0. Θέλουμε να λύσουμε το αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης της ***z=cx*** με τις επιπρόσθετες μεταβλητές y. ΔΕΝ είναι σωστό να αντικαταστήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση με την z=cx+0y εφόσον η βέλτιστη λύση θα προκύψει ενδεχομένως με μη μηδενικές τιμές του y. Για να εξασφαλίσουμε το ότι θα είναι τελικά y=0 εφόσον το πρόβλημα είναι εφικτό, θέτουμε ως αντικειμενική συνάρτηση την $z = cx - M\cdot\Sigma_j y_j$ όπου Μ ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Αν το Μ είναι αρκετά μεγάλος, το βέλτιστο θα προκύψει με y=0. Στην πράξη, η επίλυση του προβλήματος αυτού γίνεται με βήματα pivot όπου το Μ χρησιμοποιείται μόνο έμμεσα. Η μέθοδος αυτή αναλύεται πληρέστερα στο σύγγραμμα των Hillier – Lieberman.

2.4. Παραδείγματα εφαρμογής της Simplex

<u>Παράδειγμα 1</u>

max z $=2x_1 + 3x_2$

με περιορισμούς

$x_1 + \ \ x_2 \ \leq 3$

$x_1 + 2x_2 \ \leq 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Εισάγουμε <u>μεταβλητές απόκλισης</u> $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ και το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

όπου z είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η λύση $\underline{x}$ = *(0,0,3,4)* είναι βασική εφόσον οι μη μηδενικές μεταβλητές x_3 , x_4 αντιστοιχούν σε στήλες ταυτοτικού πίνακα διαστάσεων 2x2. Για την βασική αυτή λύση έχουμε $z = 0$.

Το πρόβλημα έχει σαν πρώτο πίνακα Simplex τον εξής:

Συντελεστές αντικειμενικής →

Πίνακας περιορισμών

2	*3*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*0*	*3*
1	*2*	*0*	*1*	*4*
x_1	x_2	x_3	x_4	

← Τιμή αντικειμενικής

Στοιχείο Εναλλαγής (Pivot)

Τιμές μεταβλητών

Εφόσον η Simplex σε προβλήματα μεγιστοποίησης εξετάζει αν οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών είναι θετικοί, εξετάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επιλέγουμε κάποιο θετικό συντελεστή. Χωρίς απώλεια γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε τον μεγαλύτερο συντελεστή, στην περίπτωσή μας το 3 που αντιστοιχεί στην δεύτερη μεταβλητή. Θα επιδιώξουμε να μεταβάλουμε το x_2 το δυνατόν περισσότερο, ώστε να αυξηθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η τιμή της αντικειμενικής. Το x_2 θα αυξηθεί δηλαδή έως ότου γίνει βασική μεταβλητή, υποκαθιστώντας έτσι μία ήδη βασική μεταβλητή που θα γίνει μη βασική. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το x_2 είναι όπως αναφέρθηκε προηγουμένως *min {3/1, 4/2}= 2* (Δικαιολογήστε...). Το στοιχείο εναλλαγής

(Pivot) είναι το 2ο στοιχείο της 3ης γραμμής. Στην συνέχεια, με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπουμε την 2η στήλη σε μοναδιαίο διάνυσμα με μονάδα στην 3η θέση, την θέση της εναλλαγής. Έτσι έχουμε :

							→					
	2	3	0	0	0			½	0	0	-3/2	-6
-3	1	1	1	0	3			½	0	1	-½	1
-1	½	1	0	½	2		→	½	1	0	½	2
	x_1	x_2	x_3	x_4				x_1	x_2	x_4	x_5	

Ερωτήσεις: Ποιές είναι οι βασικές μεταβλητές στον τελευταίο πίνακα; Ποιές οι τιμές τους; Ποιά η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης;

Στο επόμενο βήμα της μεθόδου παρατηρούμε ότι ο πρώτος αναθεωρημένος συντελεστής είναι ½ και άρα θετικός, οπότε η αντίστοιχη μεταβλητή x_1 είναι και η μόνη υποψήφια για βασική μεταβλητή. Το σημείο εναλλαγής βρίσκεται εξετάζοντας την παράσταση *min {1 / ½, 2 / ½} = 2.* Πάλι θα πρέπει με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών να μετατρέψουμε την πρώτη στήλη σε μοναδιαίο διάνυσμα με την μονάδα στην θέση του σημείου εναλλαγής. Έτσι έχουμε

	½	0	0	-3/2	-6		0	0	-1	-1	-7
-1	½	0	1	-½	1	*2	1	0	2	-1	2
-1	½	1	0	½	2	→	0	1	-1	1	1
	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	

Ο τελευταίος πίνακας δείχνει ότι η διαδικασία τελείωσε εφόσον όλοι οι <u>ανηγμένοι συντελεστές</u> (δηλαδή οι συντελεστές των μεταβλητών στην πρώτη γραμμή του πίνακα Simplex) της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη θετικοί. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 7. Η βασική λύση αντιστοιχεί σε μηδενικές τιμές των μη βασικών μεταβλητών x_3, x_4 , ενώ οι βασικές μεταβλητές x_1, x έχουν τιμές 2 και 1 αντίστοιχα όπως φαίνεται στον τελικό πίνακα. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται και από το αρχικό πρόβλημα. Η αρχική αντικειμενική συνάρτηση $z = 2x_1+3x_2$ παίρνει την τιμή 7 για τις παραπάνω τιμές των x_1 x_2. Επίσης οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος $x_1+x_2 \leq 3$ και $x_1+ 2x_2 \leq 4$ ικανοποιούνται ισοτικά, κάτι το αναμενόμενο εφόσον οι τιμές των μεταβλητών απόκλισης x_3 , x_4 είναι μηδενικές. □

<u>Παράδειγμα 2</u>

Να λυθεί το πρόβλημα

$max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$

με περιορισμούς

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Για να αρχίσει η Simplex θα πρέπει να βρεθεί μία αρχική βασική λύση, κάτι που δεν είναι προφανές πώς θα γίνει. Επίσης δεν είναι καν προφανές αν υπάρχει θετική λύση στις εξισώσεις περιορισμών, οπότε εισάγουμε τις μεταβλητές αποκλίσεως x_4, x_5 και θεωρούμε το νέο πρόβλημα

$\min\ x_4 + x_5$ ή $\max\ -(x_4 + x_5)$

με περιορισμούς

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad = 3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Αν το πρόβλημα αυτό έχει λύση με $x_4 = x_5 = 0$ τότε η λύση αυτή μας δίνει προφανώς μία βασική λύση και στο αρχικό πρόβλημα, εφόσον οι βασικές μεταβλητές του νέου προβλήματος είναι βασικές και στο αρχικό, καθώς αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Επιπλέον, το νέο πρόβλημα έχει μία προφανή αρχική βασική λύση, εδώ την $x_4 = 3$ $x_5 = 4$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές στο 0. Έτσι η μέθοδος Simplex μπορεί να ξεκινήσει. Ο πρώτος πίνακας γίνεται:

	0	0	0	-1	-1	z
+1	1	1	2	1	0	3
+1	1	2	3	0	1	4
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

και στην συνέχεια μηδενίζοντας τους συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης των βασικών μεταβλητών x_4 ,x_5 έχουμε τον αρχικό πίνακα Simplex, στον οποίο το σημείο εναλλαγής (pivot) είναι στην πρώτη στήλη, δεύτερη γραμμή (γιατί;)

2	3	5	0	0	+7
1	1	2	1	0	3
1	2	3	0	1	4
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

Μετά το pivot ο πίνακας γίνεται

0	1	1	-2	0	+1
1	1	2	1	0	3
0	1	1	-1	1	1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

-1

-1

με νέο pivot στην δεύτερη στήλη, τρίτη γραμμή. Ο επόμενος πίνακας γίνεται

0	0	0	-1	-1	0
1	0	1	2	-1	2
0	1	1	-1	1	1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

Ο πίνακας αυτός είναι τελικός καθώς οι τιμές στην πρώτη γραμμή που αντιστοιχούν στους ανηγμένους συντελεστές είναι μη θετικές. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 και οι βασικές μεταβλητές είναι οι $x_1=2$ και $x_2=1$, με τις άλλες μεταβλητές μηδενικές. Άρα το αρχικό πρόβλημα έχει βασική λύση που προκύπτει μετά την αφαίρεση των $x_4=x_5=0$, δηλαδή $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Το αρχικό πρόβλημα γίνεται λοιπόν με την εισαγωγή της βασικής λύσης ως εξής, αντικαθιστώντας τις γραμμές των περιορισμών με αυτές των περιορισμών του βοηθητικού προβλήματος:

2	3	6	z
1	0	1	2
0	1	1	1
x_1	x_2	x_3	

-2

-3

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο πίνακας αυτός δεν είναι κατάλληλος για το ξεκίνημα της Simplex, καθώς οι συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές ΔΕΝ είναι μηδενικοί, και έτσι πρέπει να μετατραπούν σε μηδενικούς με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών όπως φαίνεται στον προηγούμενο πίνακα από τα βέλη. Έτσι ο αρχικός πίνακας Simplex είναι ο παρακάτω:

	0	0	1	7
-1	1	0	1	2
-1	0	1	1	1
	x_1	x_2	x_3	

με σημείο pivot στην τρίτη στήλη και τρίτη γραμμή. Έτσι μετά από στοιχειώδεις πράξεις έχουμε τον τελικό πίνακα Simplex

0	-1	0	-8
1	-1	0	1
0	1	1	1
x_1	x_2	x_3	

με τιμή της αντικειμενικής z-$8=0$, $z= 8$ και τιμές των μεταβλητών $x_1 = x_3 = 1, x_2 = 0.$ □

<u>Παράδειγμα 2α</u>

Μία εναλλακτική μέθοδος λύσης του προβλήματος του παραδείγματος 2 είναι να διαμορφωθεί ως εξής:

$$max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - Mx_4 - Mx_5$$

με περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 ,..,x_5 \geq 0$$

όπου τα M μεγάλοι θετικοί αριθμοί και τα x_4,x_5 μεταβλητές απόκλισης. Στο πρόβλημα αυτό μία αρχική βασική λύση βρίσκεται εύκολα με βάση τις μεταβλητές απόκλισης, και η Simplex αρχιζει κανονικά. Στο βέλτιστο και αν το πρόβλημα έχει εφικτή λύση στις αρχικές μεταβλητές θα πρέπει οι μεταβλητές απόκλισης να μηδενίζονται. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επιβεβαιώστε ότι με M=10 η simplex δίνει την ίδια λύση που βρέθηκε στο Παράδειγμα 2, δηλαδή $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = 0$ ενώ οι x_4,x_5 είναι 0. Είναι τότε σαφές ότι η λύση του νέου προβλήματος είναι ίδια με αυτή του αρχικού (γιατί;). Ενδεχομένως όμως η τιμή του M να μην έχει επιλεγεί αρκετά μεγάλη οπότε να προκύψει βέλτιστο με x_4,x_5 διάφορα του μηδενός. Τότε το M θα έπρεπε να επιλεγεί ακόμα μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό η εφαρμογή της μεθόδου αυτής θέλει κάποια προσοχή. Βλέπε το Παράδειγμα 5 παρακάτω.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω σύστημα γραμμικών ανισοτήτων

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$3x_1 + 4x_2 \ge 11$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

είναι αδύνατο, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Simplex.

Θεωρούμε το βοηθητικό πρόβλημα

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 = 11 \quad x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,5$$

που δημιουργείται εισάγοντας τις μη αρνητικές μεταβλητές απόκλισης x_3, x_4, x_5. Για να βρούμε μία αρχική βασική λύση (κάτι που δεν είναι προφανές εφόσον το πρόσημο της x_5 είναι αρνητικό) εισάγουμε άλλη μία μη αρνητική μεταβλητή x_6 (δεν χρειάζονται άλλες, εφόσον οι x_3 και x_4 αντιστοιχούν ήδη στήλες του ταυτοτικού πίνακα και μπορούν να συμμετέχουν σε εφικτή βασική λύση) για να ακολουθήσουμε την διαδικασία του Παραδείγματος 2, οπότε έχουμε το εξής πρόβλημα

$$\min\ x_6 \ \text{ή}\ \max\ -x_6$$

με περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 11 \quad x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,6$$

Η προφανής αρχική βασική λύση είναι $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ και $x_6 = 11$ με τις υπόλοιπες μεταβλητές μηδενικές, οπότε έχουμε σύμφωνα με το Παράδειγμα 2 τον εξής αρχικό πίνακα Simplex:

+1

0	0	0	0	0	-1	0
1	1	1	0	0	0	3
1	2	0	1	0	0	4
3	4	0	0	-1	1	11
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

Η μέθοδος προχωρά όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

	3	4	0	0	-1	0	11
-3	1	1	1	0	0	0	3
-1	1	2	0	1	0	0	4
-3	3	4	0	0	-1	1	11
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

-1	0	1	-3	0	-1	0	2
	1	1	1	0	0	0	3
-1	0	1	-1	1	0	0	1
-1	0	1	-3	0	-1	1	2
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

0	0	-2	-1	-1	0	1
1	0	2	-1	0	0	2
0	1	-1	1	0	0	1
0	0	-2	-1	-1	1	1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

Ο παραπάνω πίνακας είναι τελικός καθώς οι συντελεστές της πρώτης γραμμής είναι μη αρνητικοί. Ο τελικός αυτός πίνακας δείχνει ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι -1 και βασικές μεταβλητές τις x_1=2, x_2=1 και x_6=1. Αυτό όμως σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη ικανοποίηση και των τριών αρχικών ανισοτήτων, διότι αν αυτό ήταν δυνατό η x_6 θα έπαιρνε μηδενική τιμή. Έτσι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής θα ήταν 0 και όχι -1 όπως προέκυψε παραπάνω.

Επιβεβαιώστε διαγραμματικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

<u>Παράδειγμα 4</u>

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\max \ x_1 + x_2$$

με περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Εισάγοντας μη αρνητικές μεταβλητές απόκλισης x_3, x_4 το πρόβλημα γράφεται

$$2x_1 + x_2 - x_3 \quad = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 5$$

$$x_1 \geq 0,.., x_4 \geq 0$$

και σε μορφή πίνακα ως εξής:

1	1	0	0	0
2	1	-1	0	3
3	2	0	-1	5

Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι μία βασική λύση αντιστοιχεί στις αρχικές μεταβλητές $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, λύνοντας την ισοτική μορφή των αρχικών ανισοτήτων και συγκεκριμένα το σύστημα

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 5$$

που έχει (συμπτωματικά) παραδεκτή, μη αρνητική λύση $x_1 = x_2 = 1$. Για να εκμεταλλευτούμε αυτή τη λύση μετασχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών έτσι ώστε οι δύο πρώτες στήλες να αντιστοιχούν σε ταυτοτικό πίνακα με μηδενικούς συντελεστές ανηγμένου κόστους, οπότε έχουμε τον πίνακα:

0	0	-1	1	-2
0	1	3	-2	1
1	0	-2	1	1

Κάνοντας pivot στο σημείο που σημειώνεται με κύκλο έχουμε τον πίνακα

-1	0	1	0	-3
2	1	-1	0	3
1	0	-2	1	1

Εδώ οι βασικές μεταβλητές είναι οι $x_2 = 3$, $x_4 = 1$ και οι ανηγμένοι συντελεστές δείχνουν ότι έχουμε περαιτέρω αύξηση στην αντικειμενική συνάρτηση αν αυξήσουμε την μη βασική μεταβλητή x_3, και μάλιστα όσο μεγαλύτερη η επιτρεπτή αύξηση της μεταβλητής αυτής τόσο μεγαλύτερη η τιμή της αντικειμενικής. Κατά την φιλοσοφία όμως της Simplex, η αύξηση της x_3 θα γίνει με ταυτόχρονη προσαρμογή (μείωση) των βασικών μεταβλητών x_2 , x_4 που όμως θα πρέπει να παραμείνουν μη αρνητικές, και διατηρώντας την άλλη μη βασική μεταβλητή x_1 στο 0. Οι περιορισμοί αυτοί όμως δεν εμποδίζουν το x_3 από το να αυξηθεί απεριόριστα ***εφόσον οι συντελεστές στην στήλη του pivot είναι όλοι μη θετικοί!*** Συγκεκριμένα, το x_3 πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$2x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 3$$
$$x_1 \qquad - 2x_3 \quad + x_4 = 1$$
$$x_1 = 0, x_2,.., x_4 \geq 0$$

ή

$$x_2 - x_3 \qquad = 3$$
$$- 2x_3 \quad + x_4 = 1$$
$$x_2,.., x_4 \geq 0$$

ή εφόσον x_2, $x_4 \geq 0$ έχουμε τις ισοδύναμες ανισότητες

$$- x_3 \leq 3$$
$$- 2x_3 \leq 1$$

που όμως ικανοποιούνται τετριμμένα για οποιοδήποτε μη αρνητικό (και οσοδήποτε) x_3! Από διαφορετική οπτική, αν το x_3 πάρει μία οποιαδήποτε τιμή, έστω Δ>>0, οι προτελευταίες ισότητες

$$x_2-x_3=3, -2x_3+x_4=1$$

δείχνουν ότι $x_2=3+\Delta$, $x_4=1+2\Delta$. Έτσι η οικογένεια λύσεων $\underline{x} = (0,3+\Delta,\Delta,1+2\Delta)$ είναι αποδεκτή και δίνει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $x_1+x_2=3+\Delta$, που προφανώς μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα. Λέμε τότε ότι το πρόβλημα έχει λύση +∞, ή λέμε ότι δεν έχει πεπερασμένο μέγιστο[6].

□

<u>Παράδειγμα 5</u>

Να λυθεί το πρόβλημα

$$Min\ 10\ x_1 + 10\ x_2$$

με περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Δεδομένου ότι δεν είναι προφανής η αρχική λύση, εξετάζουμε το βοηθητικό πρόβλημα

$$Min\ 10x1 + 10\ x_2 + Mx_5 + Mx_6$$

---

[6] Αν θέλετε τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεγαλύτερη από 10^8, βρείτε ορισμένες τιμές των μεταβλητών που έχουν μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Επίσης προσπαθήστε να ερμηνεύστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα αυτό.

με περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 5$$

$$x_1,.., x_6 \geq 0$$

που έχει αρχική βασική λύση x_5=3 και x_6=5. Για M=100 η λύση στο πρόβλημα μετά από simplex είναι x_1=5/3, x_3=1/3 και οι άλλες μεταβλητές μηδενίζονται, οπότε η λύση αυτή είναι βέλτιστη και στο αρχικό πρόβλημα (γιατί;). Αν όμως λύσουμε το πρόβλημα με M=1 τότε η λύση της simplex είναι x_5=3, x_6=5 και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι 0, και αυτό **δεν** είναι η λύση του αρχικού προβλήματος, καθώς δεν δίνει καν εφικτή λύση. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το M πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά για να δώσει λύση στο πρόβλημα της εύρεσης της αρχικής βασικής λύσης.

<u>Παράδειγμα 6</u>

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\min \ 3x + 2y$$

με περιορισμούς

$$x+y \geq 2$$

$$3x + y \geq 4$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα με την μέθοδο των δύο φάσεων, εφόσον δεν υπάρχει προφανής αρχική βασική λύση. Συγκεκριμένα, αν εισάγουμε μεταβλητές απόκλισης s_1,s_2 και εξετάζουμε την μορφή μεγιστοποίησης, το δεδομένο πρόβλημα γίνεται

$$\max \ -3x-2y \ \ (\textit{πιο σωστά} \ -\max \ -3x-2y)$$

με περιορισμούς

$$x+y - s_1 \quad = 2$$

$$3x + y - s_2 = 4$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \ s_1,s_2 \geq 0.$$

Η αρχική βασική λύση που είχε δοκιμαστεί παλιά $x= y= 0$ και s_1,s_2 να είναι οι βασικές μεταβλητές δεν είναι εφικτή. Έτσι εισάγουμε δύο νέες βοηθητικές μεταβλητές t_1,t_2 και εξετάζουμε τους παρακάτω ισοδύναμους περιορισμούς

$$x+y - s_1 + t_1 = 2$$

$$3x + y - s_2 + t_2 = 4$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \ s_1,s_2, t_1,t_2 \geq 0.$$

Εφόσον θέλουμε να βρούμε εφικτή λύση στο αρχικό πρόβλημα όπου δεν εμφανίζονται τα t_1,t_2 εξετάζουμε το πρόβλημα

$Min\ t_1+t_2 = -Max\ -t_1-t_2$

$x+y - s_1+ t_1= 2$

$3x + y - s_2 + t_2 = 4$

$x\geq 0, y\geq 0\ s_1,s_2, t_1,t_2 \geq 0.$

Ο πίνακας συντελεστών του προβλήματος είναι

0	0	0	0	-1	-1	w
1	1	-1	0	1	0	2
3	1	0	-1	0	1	4
x	y	s_1	s_2	$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{t_2}$	

Βασικές μεταβλητές είναι οι t_1,t_2 οπότε οι συντελεστές των στην αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι μηδενικοί. Προσθέτουμε τις δύο κάτω γραμμές στην αρχική οπότε ο πίνακας γίνεται

4	2	-1	-1	0	0	w+6
1	1	-1	0	1	0	2
3	1	0	-1	0	1	4
x	y	s_1	s_2	$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{t_2}$	

Κάνουμε τα ενδεικνυόμενα pivots στους παρακάτω πίνακες. Οι βασικές μεταβλητές σημειώνονται με έντονα σύμβολα.

2	0	1	-1	-2	0	w+2
1	1	-1	0	1	0	2
2	0	1	-1	-1	1	2
x	$\boldsymbol{y}$	s_1	s_2	t_1	$\boldsymbol{t_2}$	

0	0	0	0	-1	-1	w+0
3	1	0	-1	0	1	4
2	0	1	-1	-1	1	2
x	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{s_1}$	s_2	t_1	t_2	

Ο τελευταίος πίνακας είναι τελικός καθώς οι συντελεστές στην μηδενική γραμμή είναι αρνητικοί. Επίσης σε αυτόν οι βοηθητικές μεταβλητές t_1,t_2 δεν είναι βασικές ενώ βασικές μεταβλητές είναι οι y,s1 οι οποίες αποτελούν και βασικές μεταβλητές στο αρχικό πρόβλημα. Για να συνεχίσουμε λοιπόν την λύση του αρχικού προβλήματος με την βασική λύση που βρήκαμε κάνουμε τα εξής. Πρώτον, αφαιρούμε από τον τελευταίο πίνακα τις στήλες για τις t_1,t_2 και εισάγουμε στην θέση της μηδενικής γραμμής τους συντελεστές της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα με τις βασικές μεταβλητές σημειωμένες με έντονα στοιχεία:

-3	-2	0	0	z+0
3	1	0	-1	4
2	0	1	-1	2
x	***y***	$\boldsymbol{s_1}$	s_2	

Πάλι ο πίνακας αυτός έχει μη μηδενικούς συντελεστές σε μία τουλάχιστον βασική (την *y*). Προσθέτουμε δύο φορές την 1^{η} γραμμή στην μηδενική και έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

3	0	0	-2	z+8
3	1	0	-1	4
2	0	1	-1	2
x	***y***	$\boldsymbol{s_1}$	s_2	

Κάνουμε το pivot οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

0	0	-3/2	-1/2	z+5
0	1	-3/2	½	1
1	0	½	-1/2	1
x	***y***	s_1	s_2	

Βασικές μεταβλητές τώρα είναι οι *x,y*. Η λύση *x=y=1* είναι προφανώς βέλτιστη καθώς οι συντελεστές της αντικειμενικής είναι αρνητικοί και ικανοποιεί ισοτικά τους περιορισμούς.

2.5. Δυική Θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού- Σχέση με τις συνθήκες Kuhn Tucker

Αν εφαρμόσουμε τις συνθήκες Kuhn Tucker στο γραμμικό πρόβλημα

$$max\ \sum_j c_j\, x_j$$

$$\sum_j \alpha_{ij} x_j \le \beta_i \quad i=1,2,..,k$$

αυτές παίρνουν μία πολύ απλή μορφη καθώς τα $\nabla f,\ \nabla g,$ γίνονται σταθερά διανύσματα. Συγκεκριμένα είναι $\nabla f = (c_1,\ c_2,..,\ c_n) \equiv \underline{c}$ και $\nabla g_i = (\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\dots,\ \alpha_{in}) \equiv \underline{\alpha_i}$. Οι συνθήκες K-T μας δείχνουν (αποδείξτε το…) ότι στο βέλτιστο $\underline{x}^o$ υπάρχει διάνυσμα $\underline{u} = (u_1,\ u_2,..,\ u_k)$ με $u_i \ge 0$ και τέτοιο ώστε

(α) $\nabla f(\underline{x}^o) = \sum_j u_j\, \nabla g_j(\underline{x}^o)$ δηλαδή $\underline{c} = \sum_j u_j\ \underline{\alpha_j}$

(β) $u_i g_i(\underline{x}^o) = 0$ ή $u_i(\beta_i - \sum_j \alpha_{ij} x^o_j) = 0$ για $i = 1,2,..,k$

Προφανώς ισχύει και η σχέση $\sum_i \sum_j \alpha_{ij} u_i x^o_j = \sum_i u_i\ \beta_i$ με $i,j=1,2,..,k$ που προκύπτει αθροίζοντας ως προς i τις σχέσεις στο (β). Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ισοδύναμα σε διανυσματική μορφή ως

(α) $\underline{c} = \underline{u}A$

(β) $\underline{u}\ (\underline{\beta} - A\underline{x}) = 0$

Η (β) μπορεί να γραφεί και ως $\underline{u}A\underline{x}=\underline{u}\ \underline{\beta}$ και εφόσον $\underline{c} = \underline{u}A$ γράφεται και ως $\underline{c}\cdot\underline{x} = \underline{u}\cdot\underline{\beta}$ ή

$\sum_j c_j x_j = \sum_i u_i\ \beta_i$.

Η μορφή των σχέσεων Kuhn Tucker δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να επιλυθεί, καθώς είναι ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς u,x. Αυτό που είναι όμως ενδιαφέρον είναι ότι οι σχέσεις Kuhn Tucker μπορούν να γραφούν και αυτές σε μορφή γραμμικής βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο προβλήματα Γραμμικου Προγραμματισμού, το <u>Πρωτεύον</u> (που θα ταυτίζεται με το αρχικό μας πρόβλημα) και το <u>Δυικό</u> που ορίζονται ως εξής:

<u>Πρωτεύον</u>	<u>Δυικό</u>
$max\ c'x$	$min\ u'\beta$
$Ax \le \beta$	$u'A = c'$
x ελεύθερο	$u' \ge 0$

Έστω τώρα αυθαίρετο x που ικανοποιεί τις ανισότητες $Ax \le \beta$ του Πρωτεύοντος και ένα αυθαίρετο u που ικανοποιεί τις αντίστοιχες ανισότητες $u'A = c',\ u' \ge 0$ του Δυϊκού. Θα είναι βέβαια $c'x=u'Ax \le u'\beta$ που προκύπτει παρατηρώντας ότι $u' \ge 0$ και $Ax \le \beta$. Η ανισότητα $c'x \le u'\beta$ μας λέει ότι οποιαδήποτε εφικτή λύση του Δυϊκού μας δίνει ένα άνω φράγμα των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης του Πρωτεύοντος και οποιαδήποτε εφικτή λύση του Πρωτεύοντος μας δίνει ένα κάτω φράγμα στις τιμές του Δυικού.

Εστω τώρα ότι u^o,x^o είναι λύση των εξισώσεων Kuhn Tucker. Εφόσον τα u^o,x^o είναι εφικτές λύσεις του Δυικού και του Πρωτεύοντος αντίστοιχα, το cx^o είναι κάτω φράγμα στις τιμές που μπορεί να πάρει η αντικειμενική συνάρτηση του Δυικού, δηλαδή $c'x^o \leq u'\beta$ για όποιοδήποτε εφικτή λύση u του Δυικού. Όμως για το u^o ισχύει $c'x^o = u^{o}{'}\beta$ εφόσον το u^o ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn Tucker και έτσι είναι $c'x^o = u^{o}{'}\beta \leq u'\beta$ για όποιοδήποτε εφικτή λύση u του Δυικού. Αυτό δείχνει ότι το u^o είναι η λύση στο πρόβλημα $\min u'\beta$ με $u'A = c'$, $u' \geq 0$ που είναι ακριβώς το Δυικό. Άρα αντί να λύσουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις (α) $\underline{c} = \underline{u}A$ και (β) $\underline{u}\ (\underline{\beta} - A\underline{x}) = 0$ μπορούμε να λύσουμε το Δυικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, που μαζί με τη λύση του Πρωτεύοντος δίνουν την λύση στις αλγεβρικές εξισώσεις Kuhn Tucker.

Η επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και η ερμηνεία των λύσεων διευκολύνεται από την μελέτη του Δυϊκού παράλληλα με το Πρωτεύον πρόβλημα. Επίσης, ο αλγόριθμος Simplex μας δίνει παράλληλα με την λύση του πρωτεύοντος και αυτή του δυικού, ενώ μερικές φορές είναι καλύτερα από πλευράς υπολογιστών να λύσουμε το Δυικό και από την λύση του να βρούμε και την λύση του πρωτεύοντος. Κάτι τέτοιο γίνεται όταν το Δυικό έχει προφανή αρχική λύση, ενώ το Πρωτεύον δεν έχει. Παρατηρείστε – και αποδείξτε – ότι το Δυικό του Δυικού είναι το Πρωτεύον.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε το πρόβλημα που είδαμε στο εδάφιο 2.1:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

με περιορισμούς

$$3x_1+2x_2 \leq 5$$

$$x_1+ x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ ή } -x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0$$

Έστω u_1, u_2, u_3 και u_4 οι συντελεστές των συνθηκών Kuhn Tucker που ονομάζονται και **δυικές μεταβλητές**. Τότε το Δυικό πρόβλημα είναι το εξής:

$$\text{Min } w = 5\,u_1+2\,u_2+0\,u_3+0\,u_4 \text{ ή Max } -w$$

με περιορισμούς

$$3\,u_1+ u_2 - u_3 = 4$$

$2u_1 + u_2 - \quad u_4 = 3$

u_1, u_2, u_3 *και* $u_4 \geq 0$

Μία βασική λύση που βρίσκουμε εμπειρικά είναι η $u_2=4$, $u_3=1$ και $u_4=u_1=0$. Ο πίνακας simplex είναι

-5	-2	0	0	w
3	1	-1	0	4
2	1	0	-1	3

που γίνεται μετά από πράξεις γραμμών ώστε να είναι συμβιβαστός με την αρχική βασική λύση:

1	0	-2	0	w+8
3	1	-1	0	4
1	0	-1	1	1

Κάνοντας pivot στο 3^{ο} στοιχείο της 1^{ης} στήλης έχουμε τον πίνακα:

0	0	-1	-1	w+7
0	1	2	-3	1
1	0	-1	1	1

Ο πίνακας είναι τελικός. Τα αποτελέσματα που μας δίνει ως προς τις δυικές μεταβλητές είναι συμβιβαστά με την λύση του πρωτεύοντος $z=7$, $x_1=x_2=1$. Συγκεκριμένα η βέλτιστη δυική λύση είναι $u_1=u_2=1$, $u_3=u_4=0$ και $w=-7$. Τα u_3,u_4 ευλόγως μηδενίζονται εφόσον τα x_1,x_2 είναι θετικά. Επίσης εφόσον τα u_1,u_2 είναι θετικά, οι περιορισμοί του πρωτεύοντος ισχύουν ισοτικά. Τέλος, οι τιμές των αντικεμενικών συναρτήσεων πρωτεύοντος και δυικού ισούνται, καθώς το αρνητικό πρόσημο στο δυικό οφείλεται απλώς στην μετατροπή του προβλήματος ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Κεφάλαιο 3. Βιβλιογραφία

Hillier Lieberman: *Introduction to Operations Research*

Πολύ καλή εισαγωγική παρουσίαση για Γραμμικό Προγραμματισμό, σχετικά λιγότερα για Μαθηματικό Προγραμματισμό

Papadimitriou C. and K. Steiglitz: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*

Πολύ καλό, μεταπτυχιακού επιπέδου, καλύπτει Γραμμικό, Ακέραιο Προγραμματισμό, Πολυπλοκότητα κ.α.

P. Varaiya: *Notes on Optimization*

Πολύ καλό, μεταπτυχιακού επιπέδου, ελεύθερα διαθέσιμο στον ιστότοπο του συγγραφέα στο Πανεπιστήμιο Berkeley. Καλύπτει με μαθηματική ακρίβεια τα θέματα τόσο Γραμμικού όσο και Μη Γραμμικού Προγραμματισμού.