Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κατάστρωση υποδειγμάτων με διαφορικές εξισώσεις: Εισαγωγή στα Δυναμικά Υποδείγματα της Μηχανικής και της Θερμότητας

Σημειώσεις

Ευάγγελος Μαγείρου
Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής

Ιούνιος 2011
Μορφή 2.4

Περιεχόμενα

[Το υπόδειγμα του Νεύτωνα.....3](#)

[Ευθύγραμμη κίνηση.....4](#)

  [Κίνηση με τριβή.....4](#)

[Αρμονικός Ταλαντωτής.....4](#)

  [Εξαναγκασμένη ταλάντωση – συντονισμός.....5](#)

[Ευθύγραμμη βαρυτική κίνηση.....6](#)

[Κίνηση στο Επίπεδο – Κυκλική κίνηση.....7](#)

[Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο.....8](#)

[Δυναμική συνεχών μέσων.....11](#)

[Η εξίσωση μετάδοσης της Θερμότητας.....14](#)

[Βιβλιογραφία.....19](#)

[Ασκήσεις.....19](#)

Το υπόδειγμα του Νεύτωνα

Ιστορικά, τα δυναμικά υποδείγματα αναπτύχθηκαν από τον Νεύτωνα για την μελέτη της κίνησης των πλανητών περί το 1690. Τα υποδείγματα αυτά έλυσαν οριστικά το πρόβλημα της εξήγησης της κίνησης των πλανητών, πράγμα αδύνατο με τις παλαιότερες θεωρίες. Τα υποδείγματα που ανέπτυξε ο Νεύτωνας ήταν τύπου Διαφορικών Εξισώσεων, τις οποίες επίσης ανέπτυξε ο Νεύτωνας. Παρακάτω δίνουμε τις πιο στοιχειώδεις δυναμικές σχέσεις της Μηχανικής.

Έστω ένα σωμάτιο απειροελάχιστης διάστασης και μάζας m που κινείται σε ένα άξονα, και βρίσκεται στην θέση *x(t)* στον χρόνο *t*. Το υπόδειγμα του Νεύτωνα λέει ότι οι επιρροές του κόσμου στο σωμάτιο αυτό εμφανίζονται ως επιρροές στην επιτάχυνσή του και μόνο – όχι ως επιρροές κατ' ευθείαν στην ταχύτητά του. Τις επιρροές αυτές ονομάζουμε δυνάμεις, και έχουν φύση που εξαρτάται από το φυσικό φαινόμενο που εξετάζουμε (βαρυτικό, ελαστικό, θερμικό, ηλεκτρικό κλπ.). Η επιτάχυνση περιορίζεται από την αδρανειακή μάζα του σωματίου (ενώ η βαρυτική δύναμη εξαρτάται από την βαρυτική μάζα του σωματιδίου – δεν είναι προφανές δε ότι η βαρυτική μάζα είναι ίση με την αδρανειακή μάζα – αυτή είναι η υπόθεση της Γενικής Σχετικότητας του Einstein).

Η σχέση δύναμης – αδρανειακής μάζας – επιτάχυνσης δίνεται σύμφωνα με το υπόδειγμα του Νεύτωνα από την παράσταση *F=ma* όπου *F* η δύναμη, m η μάζα (εφεξής αναφερόμαστε στην αδρανειακή μάζα ως απλώς μάζα), και *a* η επιτάχυνση. Έτσι αν μας δίνεται η δύναμη σαν συνάρτηση διαφόρων μεγεθών, πχ της θέσης *x* αλλά και του χρόνου *t*, η κίνηση του σώματος περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$F = F(x, t, ..) = m\frac{d^2x}{d^2t}$$

που θα πρέπει να ικανοποιείται από την τροχιά *x(t)* του σωματίου. Για τον μαθηματικό προσδιορισμό της τροχιάς απαιτούνται δύο συνοριακές συνθήκες, πχ η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα.

Δύο ενδιαφέρουσες σχέσεις που μπορούν να βοηθήσουν πολύ στις εφαρμογές είναι οι σχέσεις ορμής και ενέργειας. Η σχέση της δύναμης γράφεται

$$F = F(x, t, ..) = m\frac{d^2x}{d^2t} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Αν ολοκληρώσουμε ως προς τον χρόνο έχουμε, όπου *v* είναι η ταχύτητα:

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = m(v_2 - v_1)$$

Η παράσταση *mv* ονομάζεται **Ορμή**, και η διατήρηση της ορμής είναι η αρχή ότι σε ένα σώμα που δεν υφίσταται δυνάμεις, διατηρεί την ορμή του.

Εξετάζουμε τώρα την παράσταση $mv^2/2$ και την μεταβολή της σε σχέση με μεταβολή της θέσης ενός σώματος. Είναι

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\frac{dv}{ds} = mv\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = m\cancel{v}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\cancel{\frac{dx}{dt}}} = F$$

Άρα η μεταβολή της ποσότητας $mv^2/2$ σαν συνάρτηση της θέσης ισούται με την εφαρμοζόμενη δύναμη. Η ποσότητα $mv^2/2$ ονομάζεται **Κινητική Ενέργεια**. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς τις θέσεις που πέρασε το σώμα έχουμε την ισότητα

$$\left(\frac{m{v_2}^2}{2}\right) - \left(\frac{m{v_1}^2}{2}\right) = \int_{s_1}^{s_2} Fds$$

Η παράσταση αριστερά ονομάζεται μεταβολή της κινητικής ενέργειας, ενώ το ολοκλήρωμα δεξιά ονομάζεται **Έργο**. Η ίδια σχέση ισχύει και σε κίνηση στο επίπεδο ή στο χώρο, εξετάζοντας κάθε συνιστώσα χωριστά και αθροίζοντας.

Ευθύγραμμη κίνηση

Έστω ένα σώμα που κινείται ελεύθερο, χωρίς δηλαδή δυνάμεις. Η κίνησή του ικανοποιεί την σχέση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = F = 0 \quad ή \quad \frac{d^2x}{d^2t} = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει γενική λύση $x(t)=A+Bt$ όπου A,B αυθαίρετες σταθερές που επιλέγονται ώστε να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αν το σωμάτιο έχει θέση x_o και ταχύτητα v_0 στον χρόνο $t=0$ οι σταθερές Α, Β παίρνουν τιμές x_0,v_0 και άρα έχουμε την λύση $x(t)=x_0+v_0t$ που περιγράφει την τροχιά του σωματίου (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).

Αν τώρα η δύναμη παραμένει σταθερή και έχει την τιμή f, ανεξάρτητα της θέσης όπου βρίσκεται το σωμάτιο, η κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = f$$

που έχει γενική λύση $x(t)=A+Bt+ft^2/2m$. Πάλι αν το σωμάτιο έχει θέση x_o και ταχύτητα v στον χρόνο $t=0$ οι σταθερές Α, Β παίρνουν τιμές x_0, v και άρα έχουμε την λύση $x(t)=x_0+vt+ft^2/2m$ που περιγράφει την τροχιά του σωματίου (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

Κίνηση με τριβή

Έστω ένα σωμάτιο κινείται γραμμικά υπό την επίδραση μιας σταθεράς δύναμης $F=f$ και μίας αντίστασης τριβής που έχει μέγεθος ανάλογο με την ταχύτητα του σωματίου και αντίστροφη προς την φορά της ταχύτητας, $F_{τριβή}=-kdx/dt$. Τότε η κίνηση περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = f - k\,{}^{dx}/_{dt}$$

Οι γραμμικές μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις λύνονται «μαντεύοντας» γενική λύση της μορφής e^{st} συν μία ειδική λύση. Μία ειδική λύση είναι η $x^{Ειδ}(t)=(f/k)t$ και η λύση της ομογενούς είναι της μορφής $x^{Ομ}(t)=Ae^{-kt/m}+B$. Άρα έχουμε την γενική λύση

$$x^{Γεν}(t)= Ae^{-kt/m}+(f/k)t +B$$

Τα Α, Β επιλέγονται ώστε να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αξιοσημείωτο είναι ότι για μεγάλο t ο εκθετικός όρος μηδενίζεται οπότε το σώμα κινείται με ομαλή ταχύτητα ίση με f/k. Αυτό είναι εύλογο, καθώς στην ταχύτητα αυτή η αντίσταση τριβής ισούται με την εξωτερική δύναμη, οπότε το σώμα δεν υφίσταται επιτάχυνση και άρα η ταχύτητά του δεν αλλάζει. Έτσι ένα σώμα που πέφτει από μεγάλο ύψος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας αποκτά τελικά μία σταθερή ταχύτητα.

Αρμονικός Ταλαντωτής

Έστω ένα σώμα που κινείται στον οριζόντιο άξονα κάτω από την επίδραση ενός ελατηρίου σταθεράς k. Η θέση του σώματος σχετικά με το σημείο ηρεμίας του ελατηρίου συμβολίζεται με x(t). Η δύναμη που υφίσταται το σώμα είναι $F(x)=-kx$ και η κίνησή του ικανοποιεί την σχέση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -kx$$

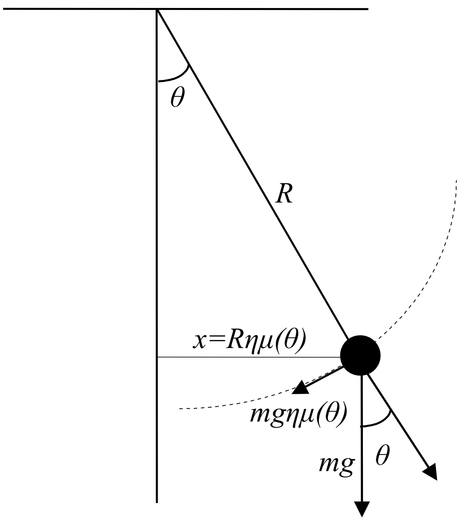
Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι ομογενής και δοκιμάζουμε την γενική λύση $x(t) = A\eta\mu(\omega t) + B\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Αντικαθιστώντας την στην διαφορική εξίσωση έχουμε

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -Am\omega^2\eta\mu(\omega t) - Bm\omega^2\eta\mu(\omega t) = -kx = -kA\eta\mu(\omega t) - kB\eta\mu(\omega t)x$$

Για να ισχύσει η σχέση θα πρέπει οι συντελεστές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων να ισούνται στις δύο παραστάσεις, δηλαδή πρέπει να είναι $\omega^2=k/m$ πράγμα που προσδιορίζει την γωνιακή ταχύτητα της κίνησης. Η κίνηση επαναλαμβάνεται με περίοδο T έτσι ώστε $\omega T=2\pi$ ή $T=2\pi/\omega$ και συχνότητα $f=1/T=\omega/2\pi$. Άρα η συχνότητα της κίνησης καθορίζεται από την μάζα και την σταθερά του ελατηρίου. Τα A, B προσδιορίζονται από την αρχική θέση και ταχύτητα του ελατηρίου.

Η λύση της εξίσωσης γράφεται και ως $x(t) = A\eta\mu(\omega t)+B\sigma\upsilon\nu(\omega t)= (A^2+B^2)^{1/2}\eta\mu(\omega t+\varphi) = X_0\eta\mu(\omega t+\varphi)$ με παραμέτρους X_0, και φ. Το X_0 ονομάζεται εύρος της ταλάντωσης, και το φ η φάση της. Το εύρος της ταλάντωσης και η φάση είναι αυθαίρετο, με την έννοια ότι προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες!

Ένα εκκρεμές ικανοποιεί περίπου τις εξισώσεις του αρμονικού ταλαντωτή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αν η γωνία θ είναι μικρή και εκφράζεται σε ακτίνια (ΟΧΙ σε μοίρες..) ισχύει $\eta\mu(\theta)\cong\theta$, οπότε η απόσταση του σωματίου από την κατακόρυφο είναι $x=R\eta\mu(\theta)\cong R\theta$ και η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι $mg\eta\mu(\theta)\sigma\upsilon\nu(\theta)\cong mg\theta=mgx/R$ εφόσον για μικρές γωνίες το συνημίτονο είναι ίσο με μονάδα. Άρα είναι $md^2x/dt^2=-mgx/R$, που είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $k=mg/R$. Επομένως για μικρές ταλαντώσεις η μετατόπιση του εκκρεμούς περιγράφεται από την γωνιακή ταχύτητα $(g/R)^{1/2}$ και περίοδο $T=2\pi/\omega=(4\pi^2R/g)^{1/2}$.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση – συντονισμός

Στις εφαρμογές έχει ιδιαίτερη σημασία η «εξαναγκασμένη ταλάντωση» όπου το σώμα υφίσταται εκτός του ελατηρίου μία εξωτερική περιοδική δύναμη $f(t)=f_0\eta\mu(\omega_1 t)$. Η λύση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης δεν είναι δύσκολη: Η εξίσωση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -kx + f_0 \eta\mu(\omega_1 t)$$

είναι πάλι γραμμική αλλά μη ομογενής. Δοκιμάζουμε μία ειδική λύση της μορφής $\Gamma\eta\mu(\omega_1 t)$ οπότε θα πρέπει

$$-m\Gamma\eta\mu(\omega_1 t)\omega_1^2 = -k\Gamma\eta\mu(\omega_1 t) + f_0\eta\mu(\omega_1 t)$$

που συνεπάγεται

$$-m\Gamma\omega_1^2 = -k\Gamma + f_0 \text{ ή τελικά } \Gamma = {f_0}/{(k - m\omega_1^2)}$$

Αλλά από τον ορισμό της φυσικής συχνότητα ω, είναι $\omega^2=k/m$ και άρα $k=m\omega^2$. Έτσι έχουμε τελικά $\Gamma=f_0/m(\omega^2-\omega_1^2)$. Η γενική λύση είναι λοιπόν

$$x^{\Gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = X_0\eta\mu(\omega t+\varphi) + f_0\, \eta\mu(\omega_1 t)\, /m(\omega^2-\omega_1^2)$$

Έστω ότι το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία (δηλαδή $x(0)=0,\ x'(0)=0$). Η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις αρχικές αυτές συνθήκες βρίσκεται ως εξής: Θα πρέπει

$$x^{\Gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}(0) = X_0\eta\mu(\varphi) + f_0\, \eta\mu(\omega_1{*}0)\, /m(\omega^2-\omega_1^2)= X_0\eta\mu(\varphi)=0 \quad \text{και}$$

$$dX^{\Gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}(0)/dt = \omega X_0\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0+\varphi) + f_0\, \omega_1\sigma\upsilon\nu(\omega_1\cdot 0)\, /m(\omega^2-\omega_1^2) =$$
$$\omega X_0\sigma\upsilon\nu(\varphi) + f_0\, \omega_1\, /m(\omega^2-\omega_1^2)=0$$

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει $\varphi=0$ και $X_0= - f_0\, \omega_1\, /m\omega(\omega^2-\omega_1^2)$ και τελικά η λύση είναι

$$x(t) = f_0\, [-\omega_1\, /\omega\ \eta\mu(\omega t) + \eta\mu(\omega_1 t)]/\, /m(\omega^2-\omega_1^2)$$

Άρα όταν η ω_1 είναι κοντά στην ω, το εύρος της ταλάντωσης γίνεται πολύ μεγάλο ανεξάρτητα σχεδόν της εφαρμοζόμενης εξωτερικής δύναμης! Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**.

Ευθύγραμμη βαρυτική κίνηση

Έστω ότι το σωμάτιο υφίσταται βαρυτική δύναμη που έχει τιμή $F(x)=-Km_Bx^{-2}$, δηλαδή η δύναμη είναι ελκτική και έχει μέγεθος αντίστροφο προς το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της βαρύτητας. Η παράμετρος K είναι μία σταθερά και m_B συμβολίσει την βαρυτική μάζα του σωματίου. Έτσι η κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -{Km_B}/{x^2} \qquad (1)$$

Αν δεχθούμε ότι $m=m_B$ η εξίσωση απλοποιείται κάπως αλλά παραμένει μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση που είναι γενικά δυσκολότερη από τις γραμμικές εξισώσεις. Η λύση της εξίσωσης αυτής στο επίπεδο επέτρεψε την μελέτη της κίνησης των πλανητών θεωρώντας ένα πλανήτη σε σχέση ως προς την Ήλιο. Η επίλυση του προβλήματος με περισσότερα σώματα είναι αναλυτικά αδύνατη, οπότε προσπαθεί κανείς να εξάγει διάφορα φυσικά συμπεράσματα χωρίς να λύσει τις εξισώσεις που προκύπτουν.

Μία τεχνική επίλυσης της εξίσωσης (1) είναι να πολλαπλασιασθεί επί την ταχύτητα dx/dt, και να παρατηρηθεί ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

καθώς και ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{Km_B}{x}\right) = 0$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{Km_B}{x}=E \tag{2}$$

όπου Ε μία σταθερά, δηλαδή ένας αριθμός που ΔΕΝ μεταβάλλεται με τον χρόνο ή τον χώρο. Η σταθερά αυτή ονομάζεται και Ενέργεια, ο πρώτος όρος Κινητική Ενέργεια ενώ ο δεύτερος Δυναμική Ενέργεια και φαίνεται ότι διαφέρει από τον ορισμό της φυσικής του Λυκείου, καθώς είναι ένας αρνητικός αριθμός!.

Μπορούμε εύκολα να συμβιβάσουμε την αντίφαση αυτή με λίγες παραπάνω γνώσεις φυσικής: Η δύναμη της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γής είναι kMm/R^2 όπου Μ η μάζα της Γής, R η ακτίνα της Γής, k μία σταθερά, m η μάζα του σώματος που εξετάζουμε. Άρα θα πρέπει η παράσταση kM/R^2 να ισούται με g την σταθερά της βαρύτητας - που είναι 9,81 m/sec^2. Επίσης στην αρχική εξίσωση της βαρύτητας, στην θέση του όρου Km_B θέτουμε kMm οπότε η δυναμική ενέργεια είναι ίση με $-Km_B/x = -mgR^2/x$.

Για ύψη h από την επιφάνεια της Γής, η δυναμική ενέργεια γίνεται $-mgR^2/(R+h)$ ισούται και με $-mgR/(1+h/R)$. Αν τώρα εξετάζουμε μικρά ύψη, το h/R είναι μικρός αριθμός οπότε ισχύει κατά προσέγγιση

$$-mgR(1+h/R) = -mgR(1-h/R)+o(h/R) \cong -mgR+mgh$$

Δηλαδή η δυναμική ενέργεια ισούται με μία σταθερά συν τον γνωστό μας από το Λύκειο όρο mgh.

Μπορούμε τώρα να βρούμε την ταχύτητα διαφυγής, την ταχύτητα δηλαδή που πρέπει να έχει ένα σώμα για να ξεφύγει από την επιρροή της Γής. Για να είναι ένα σώμα εκτός της επιρροής της Γης θα πρέπει να βρίσκεται σε άπειρη απόσταση και να έχει μηδενική ταχύτητα, δηλαδή να έχει τελικά συνολική ενέργεια Ε μηδενική σύμφωνα με την εξίσωση (2). Αλλά εφόσον η ενέργεια διατηρείται, θα πρέπει να έχει την ίδια ενέργεια και όταν βρίσκεται στην επιφάνεια της Γής, θα πρέπει δηλαδή να είναι πάλι με βάση την (2)

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{mgR^2}{R}=0$$

που συνεπάγεται ότι η αρχική ταχύτητα θα πρέπει να ισούται με $(2gR)^{1/2}$. Για $g=9,81$ m/sec^2 και $R=6.4\cdot 10^6$ m η ταχύτητα αυτή είναι *11.200 m/sec* ή περίπου *40.000 km/hr*!

Κίνηση στο Επίπεδο – Κυκλική κίνηση

Για να μελετήσουμε την κίνηση στο επίπεδο θα πρέπει να αναλύσουμε την κίνηση στον χρόνο. Η κίνηση ενός σώματος που είναι σημειακό περιγράφεται από δύο συναρτήσεις του χρόνου $(x(t),y(t))$ που μπορούμε να φανταστούμε ως ένα κινητό διάνυσμα με αρχή το τέλος των αξόνων και τέλος το σημείο αυτό. Η ταχύτητα ορίζεται ως $(dx/dt,dy/dt)$, και η επιτάχυνση ως $(d^2x/dt^2,d^2y/dt^2)$ και οι υπολογισμοί των είναι εύκολοι αν γνωρίζουμε την τροχιά. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι η ομαλή κυκλική κίνηση, όπου προφανώς x=Rσυν(ωt), y=Rημ(ωt). Η ταχύτητα ισούται με $(dx/dt,dy/dt)=(\omega R\eta\mu(\omega t),-\omega R\sigma\upsilon\nu(\omega t))$. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $(x,y)\cdot(dx/dt,dy/dt) = \omega R^2\eta\mu(\omega t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)-\omega R^2\eta\mu(\omega t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)=0$, δηλαδή τα δύο διανύσματα είναι κάθετα, ενώ το μήκος της ταχύτητας ισούται με ωR, όπου R η ακτίνα της κίνησης. Η επιτάχυνση υπολογίζεται με μία επιπλέον παραγώγιση, και είναι $(d^2x/dt^2,d^2y/dt^2) = (-\omega^2R\sigma\upsilon\nu(\omega t), \omega^2R\eta\mu(\omega t))= -\omega^2(x,y) = -\omega^2(R\sigma\upsilon\nu(\omega t),R\eta\mu(\omega t)$. Αυτό δείχνει ότι η επιτάχυνση είναι αντίθετη από το διάνυσμα θέσης, δείχνει δηλαδή προς το κέντρο. Το μήκος της επιτάχυνσης είναι ίσο με ω^2R ή ίσο με υ^2/R, δηλαδή ο γνωστός τύπος της κεντρομόλου επιταχύνσεως *(με* $\upsilon=\omega R$*)*.

Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο

Ένα από τα αρχαιότερα προβλήματα φυσικής είναι η εξήγηση της κίνησης των πλανητών. Απλή παρατήρηση το νυκτερινού ουρανού δείχνει ότι όλα σχεδόν τα άστρα περιστρέφονται γύρω από ένα άξονα που διέρχεται περίπου από τον Πολικό Αστέρα στον βορρά. Η κίνηση είναι αριστερόστροφη, εξ Ανατολών προς Δυσμάς. Όμως ο ίδιος ο Ήλιος κινείται σε σχέση με τα άλλα άστρα, και επιπλέον ορισμένα άστρα επίσης κινούνται σε σχέση με τα άλλα, το ίδιο και η Σελήνη. Η κίνηση των άστρων αυτών – που ονομάζονται Πλανήτες – είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και η εξήγηση της κινήσεώς των επιχειρήθηκε ήδη από τους αρχαίους αστρονόμους. Ο Πτολεμαίος εξήγησε την κίνηση θεωρώντας ότι η κίνηση γίνεται σε κύκλους επί κύκλων με κέντρο την Γή, και οι εξηγήσεις αυτές ήταν αρκετά επιτυχείς, επιτρέποντας την πρόβλεψη της κίνησης των Πλανητών. Όμως το Πτολεμαϊκό σύστημα ήταν ιδιαίτερα περίπλοκο, οπότε προτάθηκαν εναλλακτικά συστήματα όπου ο Ήλιος ήταν το κέντρο περιστροφής. Επίσης συλλέχθηκαν πολλά στοιχεία για την κίνηση των Πλανητών, που συνοψίστηκαν από τον Κέπλερ σε εμπειρικούς «νόμους» που ανέφεραν ότι

Α. Η κίνηση των πλανητών γίνεται επί ελλείψεων με τον Ήλιο να είναι στην μία εστία

Β. Η κίνηση κάθε πλανήτη είναι τέτοια ώστε σε ίσο χρόνο η ακτίνα του από τον Ήλιο να καλύπτει ίσα εμβαδά

Γ. Ο χρόνος περιστροφής κάθε πλανήτη γύρω από τον Ήλιο εις το τετράγωνο είναι ανάλογος του κύβου του μικρού άξονα της ελλειπτικής τροχιάς του

Η προσπάθεια εξήγησης των νόμων του Κέπλερ με αναγωγή σε απλούστερες αρχές επιτεύχθηκε από τον Νεύτωνα στο σημαντικότερο επιστημονικό σύγγραμμα της φυσικής, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica - Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας* που εκδόθηκε το 1687. Η ανάλυση του Νεύτωνα δίνεται συνοπτικά παρακάτω.

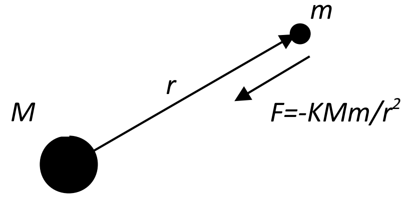
Μεταξύ δύο σωμάτων μάζας m,M υφίσταται ελκτική δύναμη στιγμιαίας εφαρμογής και κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τα συνδέει με μέτρο ίσο με KmM/r^2 όπου r η απόσταση των δύο σωμάτων, K σταθερά. Έστω τώρα ότι το ένα από τα δύο σώματα είναι σταθερό, πολύ μεγάλης μάζας ώστε παραμένει ουσιαστικά ακίνητο. Έστω ότι το άλλο σώμα είναι σε θέση με συντεταγμένες (x,y) σχετικά με το πρώτο, ακίνητο σώμα. Τότε υφίσταται δυνάμεις που οδηγούν σε κινήσεις που περιγράφονται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις. Πρώτον κατά τον άξονα των x ισχύει ότι

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{KmM}{(x^2+y^2)} \qquad (3α)$$

Κατά τον άξονα των y ισχύει η αντίστοιχη σχέση

$$m\frac{d^2y}{d^2t} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{KmM}{(x^2+y^2)} \qquad (3β)$$

Βλέπε το παρακάτω σχήμα.



Οι εξισώσεις (3α) (3β) είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που είναι δύσκολο να λυθεί μαθηματικά, αν και είναι σχετικά εύκολη η λύση του με αριθμητικές μεθόδους. Όμως αυτό που επιθυμείται είναι να εξεταστεί κατά πόσο οδηγεί σε λύσεις που εξηγούν τους νόμους της κίνησης των πλανητών.

Για την θεωρητική λύση των εξισώσεων αυτό χρησιμοποιούνται οι εξής τεχνικές. Πρώτον οι εξισώσεις πολλαπλασιάζονται επί *dx/dt* και *dy/dt* αντίστοιχα, και προστίθενται, οπότε έχουμε

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{d^2t}+m\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{d^2t}=-KmM\left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{dy}{dt}\right] \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι $d((dx/dt)^2)/dt=2(dx/dt)(d^2x/dt^2)$ και αντίστοιχα για y, καθώς επίσης ότι

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{dy}{dt}\right]$$

Κατόπιν τούτων η (4) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)+\frac{KMm}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0$$

Ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει ότι η παράσταση που παραγωγίζεται παραμένει σταθερή κατά την κίνηση. Η σταθερή αυτή είναι η συνολική ενέργεια, ο πρώτος όρος είναι η Κινητική Ενέργεια ενώ ο δεύτερος η Δυναμική Ενέργεια του Πεδίου Βαρύτητας, οπότε ισχύει

$$\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)+\frac{KMm}{\sqrt{x^2+y^2}}=E_0 \qquad (5)$$

Ο όρος E_o είναι η συνολική ενέργεια. Η σχέση της ενέργειας είναι πολύ σημαντική καθώς μας δίνει μία σχέση για τις πρώτες παραγώγους – που είναι πιο εύκολες στην λύση από τις σχέσεις των δευτέρων παραγώγων. Χρειαζόμαστε όμως άλλη μία σχέση για τις πρώτες παραγώγους της λύσης του συστήματος (3), κάτι που προκύπτει ως εξής. Πολλαπλασιάζουμε την (3α) επί y, την (3β) επί y και αφαιρούμε τις δύο σχέσεις οπότε προκύπτει ότι

$$my\frac{d^2x}{d^2t}-mx\frac{d^2y}{d^2t}=-KmM\left[\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{1}{(x^2+y^2)}-\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{1}{(x^2+y^2)}\right]=0$$

Επίσης ισχύει $myd^2x/dt^2-mxd^2y/dt^2=md/dt[ydx/dt-xdy/dt]$ και άρα

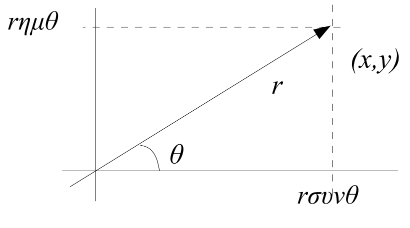
$$m\frac{d}{dt}\left[y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right]=my\frac{d^2x}{d^2t}-mx\frac{d^2y}{d^2t}=0$$

Έτσι έχουμε ολοκληρώνοντας

$$m\left[y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right]=L \qquad (6)$$

Η ποσότητα *mydx/dt-mxdy/dt* δηλαδή παραμένει σταθερή κατά την κίνηση στο βαρυτικό πεδίο. Η ποσότητα αυτή είναι γνωστή ως ***Στροφορμή***, *L* Η στροφορμή λοιπόν παραμένει σταθερή στην κίνηση σε βαρυτικό πεδίο και γενικά σε οποιοδήποτε πεδίο του οποίου η διεύθυνση κατευθύνεται προς κάποιο σταθερό κέντρο.

Οι σχέσεις διατήρησης ενέργειας και στροφορμής οδηγούν σε δύο εξισώσεις που αφορούν τις πρώτες παραγώγους, και είναι απλούστερες από τις αρχικές (3). Η επίλυσή των γίνεται ακόμα πιο εύκολη αν χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες. Θέτουμε *x=rσυνθ, y=rημθ* – βλέπε το παρακάτω σχήμα



Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές έχουμε

dx/dt=συνθdr/dt-rημθdθ/dt και *dy/dt=ημθdr/dt+rσυνθdθ/dt*

Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στην (6) προκύπτει μετά από απλοποίηση ότι $mr^2 d\theta/dt=L$. Όμως ο όρος $r^2 d\theta/dt$ είναι ακριβώς ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που διαγράφει μία ακτίνα που κινείται γύρω από ένα κέντρο. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα διαγράφει σε ίσο χρόνο ίσα εμβαδά, δηλαδή ο $2^{ος}$ νόμος του Κέπλερ ικανοποιείται από την κίνηση αυτή.

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες σε πολικές συντεταγμένες στην σχέση (5) της ενέργειας έχουμε

$$\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) + \frac{KMm}{r} = E_0$$

Εφόσον όμως $mr^2 d\theta/dt=L$ η μεταβλητή γωνίας θ απαλείφεται από την παραπάνω σχέση και έχουμε

$$\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + \frac{KMm}{r} = E_0 \qquad (7)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής περιγράφει την κίνηση της ακτίνας σαν συνάρτηση του χρόνου. Όταν έχει λυθεί η σχέση αυτή, η αντίστοιχη γωνία βρίσκεται ολοκληρώνοντας την σχέση $d\theta/dt=L/mr^2$. Η επίλυση αυτή δεν είναι εύκολη, παρόλο που είναι μία εξίσωση μιας μεταβλητής πρώτης παραγώγου. Μπορούμε πιο εύκολα να βρούμε απλώς το «σχήμα» της τροχιάς που ακολουθεί το σώμα. Πρώτον, χρησιμοποιώντας την αλυσωτή παραγώγιση έχουμε $dr/dt = dr/d\theta d\theta/dt = L/mr^2 dr/d\theta$, οπότε η (7) γίνεται

$$\frac{m}{2}\left(\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + \frac{KMm}{r} = E_0 \qquad (8)$$

Θέτουμε $u=1/r$ οπότε $du/d\theta=-1/r^2 dr/d\theta$, και η σχέση (8) γίνεται

$$\frac{m}{2}\left(\left(\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2 L^2}{m^2}\right) + uKMm = E_0$$

Τέλος παραγωγίζοντας ως προς θ η σχέση γίνεται

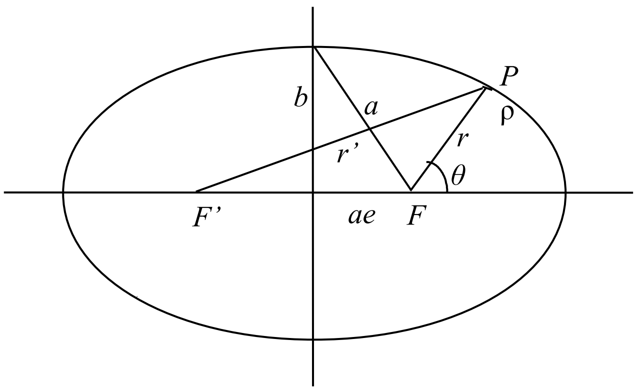
$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) + KMm^2/_{L^2} = 0 \qquad (9)$$

Η (9) είναι εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή συν μία σταθερά, με γενική λύση

$$u = \frac{1}{r} = -KMm^2/_{L^2} + \sigma\upsilon\nu(\theta - \theta_o) \quad \text{ή}$$

$$r = \frac{1}{-\frac{KMm^2}{L^2} + A\sigma\upsilon\nu(\theta-\theta_0)} \qquad (10)$$

Όμως η (10) είναι μία εξίσωση κωνικής τομής (έλλειψης, παραβολής ή υπερβολής), όπως φαίνεται στην ανάλυση της έλλειψης που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η έλλειψη είναι τα σημεία που το άθροισμα των αποστάσεών των από τις εστίες F,F' ισούνται με μία σταθερά $2a$, δηλαδή στο σχήμα $r+r'=2a$. Θεωρούμε ότι $0\leq e\leq 1$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα των συνημιτόνων στο τρίγωνο F,F',P έχουμε ότι $r'^2=r^2+4a^2e^2+4rae\sigma\upsilon\nu\theta=(2a-r)^2$ οπότε λύνοντας ως προς r προκύπτει ότι

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\sigma\upsilon\nu(\theta)}$$

Η σχέση αυτή είναι της μορφής της λύσης (10), και θα προκύψει για κατάλληλες αρχικές τιμές ενέργειας και στροφορμής. Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για την υπερβολή και την παραβολή, που και πάλι μπορούν να προκύψουν από την (10).

Έτσι, ανάλογα με τις αρχικές τιμές θέσης και ταχύτητας ενός σώματος θα προσδιορισθούν οι παράμετροι A, θ_o και θα προσδιορισθεί το σχήμα της τροχιάς του. Κατά συνέπεια η κίνηση είναι δυνατόν να είναι έλλειψη όπως στην περίπτωση των πλανητών. Μπορεί όμως να είναι παραβολή ή υπερβολή. Τέτοιες υπερβολικές τροχιές διαγράφουν οι κομήτες. Εν πάση περιπτώσει, επιβεβαιώνεται πρώτος νόμος του Κέπλερ.

Στην περίπτωση ελλειπτικών τροχιών, η κίνηση είναι περιοδική, με περίοδο που προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την διατήρηση της στροφορμής. Με παραπέρα ανάλυση μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά η περίοδος και να επιβεβαιωθεί και ο τελευταίος νόμος του Κέπλερ. Είναι αξιοσημείωτο ότι αν ο νόμος της βαρύτητας δεν ήταν ακριβώς της μορφής αντίστροφου τετραγώνου αλλά χαρακτηριζόταν από κάποια δύναμη κοντά στο 2, οι τροχιές θα ήταν περίπου ελλείψεις αλλά θα είχαν «μετάπτωση», δηλαδή οι άξονές των θα παρουσίαζαν περιστροφή. Η τροχιά των πλανητών έχει μεταπτώσεις, αλλά αυτή οφείλεται στην επίδραση των άλλων πλανητών.

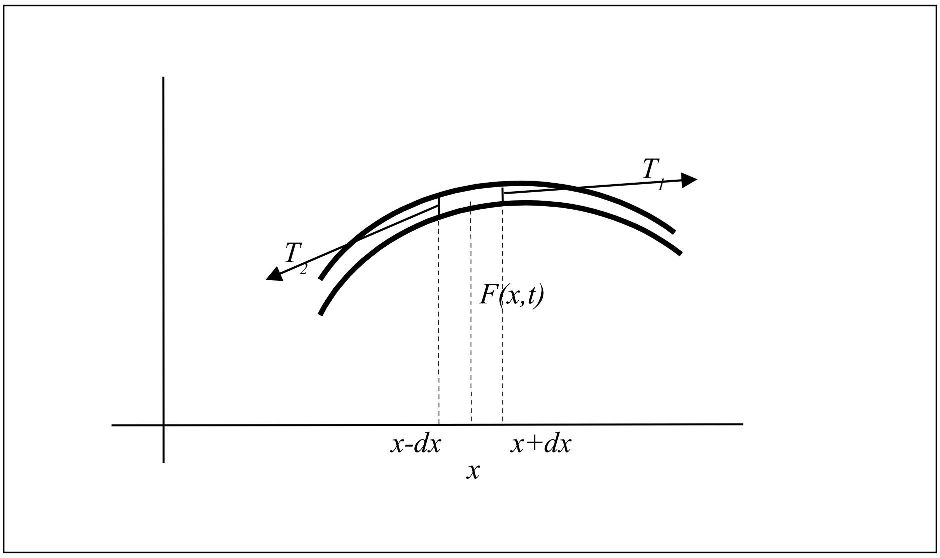
Ειδικά στην περίπτωση κυκλικών τροχιών, θα πρέπει η βαρύτητα να προσδίδει την απαραίτητη επιτάχυνση για να διαγράφεται κυκλική τροχιά, δηλαδή θα πρέπει $m\omega^2 R=KmM/R^2$ και άρα $\omega=(KM/R^3)^{1/2}$. Η περίοδος της κυκλικής τροχιάς ισούται με $T^2=2\pi/\omega=2\pi R^3/(KM)$. Αυτός όμως είναι ακριβώς ο τρίτος νόμος του Κέπλερ, εξειδικευμένος σε κυκλικές τροχιές όπου οι άξονες ταυτίζονται με την ακτίνα του κύκλου.

Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν τροχιές που υπακούουν τις παραπάνω σχέσεις του Νεύτωνα, εκτός του Ερμή, του οποίου η τροχιά έχει μικρές αλλά σημαντικές αποκλίσεις από τα παραπάνω. Οι αποκλίσεις αυτές εξηγούνται από την θεωρία της βαρύτητας που υπάγεται στην Γενική Σχετικότητα του Einstein.

Δυναμική συνεχών μέσων

Οι παραπάνω αναλύσεις μπορούν να επεκταθούν σε ανάλυση της κίνησης συνεχών μέσων όπως η κίνηση μίας χορδής, της επιφάνειας ενός ρευστού, των αυξομειώσεων της πίεσης σε ένα μέσο όπως ο αέρας. Οι εξισώσεις αυτές οδηγούν σε κύματα με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τα φυσικές των παραμέτρους.

Ας θεωρήσουμε μία χορδή που δεν υφίσταται άλλες δυνάμεις παρά μόνο την εσωτερική της τάση Τ που είναι ομοιόμορφη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μικρό οριζόντιο τμήμα της χορδής ισορροπεί καθώς υφίσταται δυνάμεις ίσες και αντίρροπες μεγέθους Τ εκατέρωθεν της διατομής του. Αν τώρα το μικρό αυτό τμήμα μετακινηθεί προς τα πάνω, οι δυνάμεις που θα εξασκηθούν επάνω του φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Έστω $F(x,t)$ η θέση του μικρού τμήματος σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα στο σημείο x του οριζόντιου άξονα και στον χρόνο t. Τότε υφίσταται δύναμη T_1 από τα δεξιά του και T_2 από τα αριστερά του. Οι δυνάμεις αυτές ασκούνται κατά την εφαπτόμενη της χορδής, που έχει κλίση $\partial F/\partial x$. Θεωρούμε ότι η κλίση είναι μικρή και ότι η μετακίνηση δεν έχει οριζόντια συνιστώσα. Έτσι η κατακόρυφη συνιστώσα που οφείλεται στην T_1 είναι $T\partial F(x+dx,t)/\partial x$ και αυτή που οφείλεται στην T_2 είναι $-T\partial F(x-dx,t)/\partial x$ όπου T είναι η τάση κατά μήκος της χορδής. Έτσι η καθαρή δύναμη που εξασκείται σε ένα μήκος χορδής $2dx$ είναι $T\partial F(x+dx,t)/\partial x - T\partial F(x-dx,t)/\partial x \cong 2Tdx\partial^2F(x)/\partial x^2$.

Αν η χορδή έχει μάζα ρ ανά μονάδα μήκους, η μάζα του τμήματος μήκους $2dx$ είναι $2\rho dx$, και η επιτάχυνσή του κατά την κατακόρυφη διεύθυνση είναι $\partial^2F(x,t)/\partial t^2$. Επομένως ο νόμος του Νεύτωνα μας για την κατακόρυφη κίνηση του τμήματος αυτού της χορδής δίνει την σχέση $2\rho dx\partial^2F(x)/\partial t^2 = 2Tdx\partial^2F(x)/\partial x^2$. Ο αριστερά όρος είναι η μάζα επί την επιτάχυνση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Ο όρος δεξιά είναι η καθαρή δύναμη κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Απλοποιώντας την σχέση, προκύπτει η εξίσωση

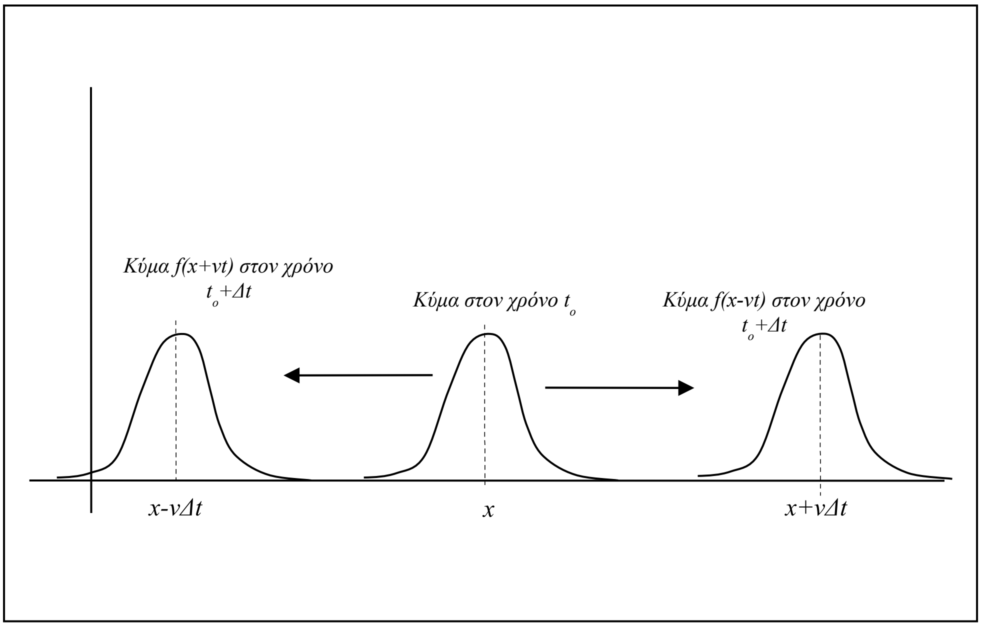
$$\rho\partial^2F(x,t)/\partial t^2 = T\partial^2F(x,t)/\partial x^2$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση ενός Κύματος – Κυματική Εξίσωση. Είναι μία Διαφορική Εξίσωση με Μερικές Παραγώγους Δευτέρας Τάξεως αλλά γραμμική. Σε περίπτωση που θέλαμε να παρουσιάσουμε την κίνηση της χορδής για αυθαίρετες μετατοπίσεις, όχι μόνο μικρές μετατοπίσεις κατά την κατακόρυφη διεύθυνση θα προέκυπταν μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Μία απλή λύση της κυματικής εξίσωσης είναι η εξής: Θεωρούμε μία συνάρτηση – ένα σχήμα κατά μήκος της χορδής $f(x)$ και εξετάζουμε την συνάρτηση $F(x,t)=f(x+vt)$ με $v^2=T/\rho$. Τότε ισχύει

$$\partial^2F(x,t)/\partial x^2 = d^2f(x+vt)/dt^2 \qquad \text{ενώ}$$
$$\partial^2F(x,t)/\partial t^2 = v^2d^2f(x+vt)/dt^2$$

Λόγω του ορισμού της ταχύτητας η τελευταία παράσταση ισούται με $T/\rho d^2f(x+vt)/dt^2$. Από τις δύο αυτές σχέσεις επιβεβαιώνεται λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(x+vt)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Η ερμηνεία της λύσης αυτής είναι ότι παριστά ένα «σχήμα» που μετακινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα –v. Όντως, το ύψος του κύματος στο σημείο x στον χρόνο t είναι το ίδιο με το ύψος του κύματος στον χρόνο t_1 στο σημείο $x_1=x-v(t_1-t)$ εφόσον ισχύει τότε $x_1+vt_1=x+vt$. Βλέπε το παρακάτω σχήμα



Στην λύση αυτή, το κύμα σχήματος *f* διαδίδεται χωρίς αλλαγή σχήματος είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά με την ταχύτητα *v* που προσδιορίζεται τόσο από την τάση *T* στην χορδή όσο και από την πυκνότητά της ρ. Σαν συνέπεια της σημασίας της ταχύτητας διάδοσης v, η κυματική εξίσωση γράφεται ως

$$\partial^2 F(x,t)/\partial t^2 = v^2 \partial^2 F(x,t)/\partial x^2$$

Μία πολύ ενδιαφέρουσα άλλη λύση της κυματικής εξίσωσης προκύπτει αν θεωρήσουμε λύσεις πολλαπλασιαστικής μορφής $F(x,t)=X(x)T(t)$, που είναι δηλαδή γινόμενο μιας συνάρτησης του χώρου και μίας συνάρτησης του χρόνου. Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι η X πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $v^2/Xd^2X/dx^2=1/Td^2T/dt^2$. Εφόσον όμως η πρώτη συνάρτηση εξαρτάται από το x ενώ η δεύτερη από το *t*, και η ισότητα ισχύει για κάθε *x,t,* η σχέση πρέπει να ισούται με μία ποσότητα -*λ* ανεξάρτητη του *x* ή του *t*. Επομένως πρέπει να ισχύει

$$v^2/Xd^2X/dx^2=1/Td^2T/dt^2=-\lambda$$

Από την σχέση αυτή προκύπτουν οι δύο διαφορικές εξισώσεις τύπου αρμονικού ταλαντωτή

$$1/Td^2T/dt^2=-\lambda \text{ ή } d^2T/dt^2=-\lambda T$$

$$v^2/Xd^2X/dx^2=-\lambda \text{ ή } v^2d^2X/dx^2=-\lambda X$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε να περιγράψουμε μία χορδή μήκους *L* με σταθερά άκρα, δηλαδή να είναι $F(0,t)=F(L,t)=0$ για κάθε *t.* Αν πάρουμε $\lambda>0$, τότε η λύση της πρώτης εξίσωσης είναι $T(t)=A\eta\mu(\omega t+t_o)$ με $\omega=(\lambda)^{1/2}$, ή ισοδύναμα $\lambda=\omega^2$. Η αντίστοιχη λύση της δεύτερης σχέσης είναι $X(x)=B\eta\mu(\omega x/v+xo)$. Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες $F(0,t)=F(L,t)=0$ για κάθε t θα πρέπει $X(0)=X(L)=0$ οπότε $X(0)=A\eta\mu(\omega x_o)=0$ και άρα $x_o=0$. Επίσης $X(L)=0$ και άρα $\omega L=n\pi v$ με *n* ακέραιο. Οι επιτρεπτές γωνιακές ταχύτητες λοιπόν είναι $\omega=n\pi v/L$ *που αντιστοιχούν σε συχνότητες* $\varphi=\omega/2\pi= nv/2L$. *Αποδεικνύεται εύκολα ότι δεν υπάρχουν λύσεις αν* $\lambda<0$.

Έτσι έχουμε μία οικογένεια λύσεων

$$F_n(x,t)=X(x)T(t)= A_n\eta\mu(\omega_n t+t_o)\eta\mu(\omega_n x/v)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις παραμετροποιούνται ως προς την ακέραια παράμετρο *n*. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ένα οποιοδήποτε άθροισμα τέτοιων συναρτήσεων αποτελεί επίσης λύση. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες μπορούν να παρασταθούν σαν ένα άθροισμα της μορφής των παραπάνω συναρτήσεων. Έχουμε δηλαδή την γενική λύση:

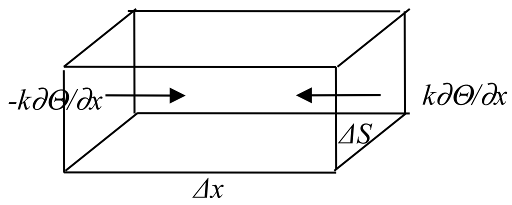
$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \eta\mu\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\eta\mu\left(\sqrt{\frac{\rho}{T}}\frac{n\pi t}{L} + t_n\right)$$

Οι συντελεστές A_n, t_n είναι οι συντελεστές Fourier, και η ανάλυση του τύπου αυτού σε ημιτονοειδείς συναρτήσεις ονομάζεται ανάλυση Fourier.

Η εξίσωση μετάδοσης της Θερμότητας

Μια διαφορική εξίσωση σχετική με αυτήν της διάδοσης του κύματος είναι η εξίσωση μετάδοσης της θερμότητας πάνω σε μία ράβδο. Θεωρούμε μία μονωμένη ράβδο, μήκους L που είναι μονωμένη στο μήκος της αλλά στα άκρα έχει θερμοκρασία T_1 και T_2 αντίστοιχα, που παραμένουν σταθερές ή μεταβάλλονται κατά δεδομένο τρόπο. Ζητείται να υπολογισθεί η θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου.

Η βασική εξίσωση μετάδοση της θερμότητας προκύπτει ως εξής. Έστω ένα μικρό τμήμα της ράβδου μήκους Δx και διατομής ΔS. Έστω ότι η θερμοκρασία της ράβδου σε σημείο που απέχει απόσταση x από το αριστερό της άκρο είναι στον χρόνο t ίση με Θ(t,x). Προκύπτει πειραματικά ότι υπάρχει ροή θερμότητας προς τα αριστερά ύψους $\kappa\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x}\Delta S$. Δηλαδή αν η θερμοκρασία είναι αυξητική κατά μήκος της ράβδου, υπάρχει ροή θερμότητας προς τα αριστερά. Βλέπε το παρακάτω σχήμα



Αυτό σημαίνει ότι η ροή εντός του τμήματος της ράβδου είναι

$$k\left(-\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial\Theta(t,x+\Delta x)}{\partial x}\right) \cong k\frac{\partial^2\Theta(t,x)}{\partial x^2}\Delta S\Delta x$$

Αν η ροή διατηρηθεί σταθερή για μικρό χρονικό διάστημα Δt, η ροή της θερμότητας αυτή θα αυξάνει την θερμοκρασία του τμήματος αυτού κατά $\Delta\Theta$. Όμως για αυτό απαιτείται θερμότητα ίση με $\rho\mu\Delta x\Delta S\Delta\Theta$ όπου ρ η θερμοχωρητικότητα, $\Delta x\Delta S$ ο όγκος, και μ η πυκνότητα μάζας της ράβδου. Έτσι έχουμε διαιρώντας με Δt την σχέση

$$k\frac{\partial^2\Theta(t,x)}{\partial x^2}\Delta S\Delta x\Delta t = \rho\mu\Delta x\Delta S\Delta\Theta$$

και θεωρώντας μικρό Δt, προκύπτει η σχέση

$$k\frac{\partial^2\Theta(t,x)}{\partial x^2} = \rho\mu\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial t}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση της θερμότητας. Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να γραφούν για πεπερασμένες περιοχές στον χώρο. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις για την αποτίμηση δικαιωμάτων σε μετοχές που κινούνται κατά απρόβλεπτο τρόπο είναι παρεμφερείς με την εξίσωση της θερμότητας.

Σαν πρώτη εφαρμογή, εξετάζουμε την κατάσταση ισορροπίας. Αν έχουμε καταλήξει σε θερμική ισορροπία, η Θ δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο και άρα θα πρέπει σαν συνάρτηση του x η συνάρτηση Θ να είναι γραμμική εφόσον η δεύτερη παράγωγός της είναι μηδενική. Άρα η θερμοκρασία μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος της ράβδου με ακραίες τιμές τις δεδομένες T_1, T_2. Αν δηλαδή η ράβδος έχει μήκος L, η συνάρτηση $\Theta^o(t,x)=T_1+x(T_2-T_1)/L$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και φυσικά είναι λύση της εξίσωσης. Έτσι χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να αναγάγουμε οποιοδήποτε πρόβλημα με συνοριακές τιμές $\Theta(t,0)=T_1$, $\Theta(t,L)=T_2$ για όλες τις χρονικές στιγμές t σε ένα άλλο με μηδενικές συνοριακές τιμές $\Theta(t,0)=\Theta(t,L)=0$, εξετάζοντας απλά στην λύση του προβλήματος με μηδενικές συνοριακές την γραμμική λύση $T_1+x(T_2-T_1)/L$.

Για να την λύσουμε χρησιμοποιούμε πάλι την εξέταση πολλαπλασιαστικών λύσεων και την κατασκευή μιας γενικής λύσης σαν άθροισμα στοιχειωδών λύσεων. Αν π.χ. είναι $\Theta(t,x)=T(t)X(x)$, για να έχουμε λύση της εξίσωσης θερμότητας θα πρέπει

$$kTd^2X/dx^2=\rho\mu X\,dT/dt$$

και διαιρώντας με XT πρέπει να ισχύει

$$1/Xd^2X/dx^2=\rho\mu/kT\,dT/dt=-\lambda^2$$

Έτσι έχουμε τις λύσεις $T(t)=T_\lambda exp(-((k\lambda^2/\rho\mu)t)$ και $X(x)=X_\lambda \eta\mu(\lambda x+x_\lambda)$ που οδηγούν στις γενικές λύσεις που είναι άθροισμα των παραπάνω για διάφορα λ:

$$\Theta(t,x)=\Sigma_\lambda \Theta_\lambda\, \eta\mu(\lambda x+x_\lambda)exp(-(k\lambda^2/\rho\mu)t)$$

Για ράβδους πεπερασμένου μήκους και μηδενικές συνοριακές συνθήκες μπορούμε να βρούμε λύσεις για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες χρησιμοποιώντας διακριτές τιμές των λ. Συγκεκριμένα εξετάζουμε στοιχειώδεις λύσεις που μηδενίζονται στα άκρα της ράβδου, δηλαδή:

$$X(0)=X_\lambda \eta\mu(x_\lambda)=0 \qquad \text{και άρα } x_\lambda=0$$

$$X(L)=X_\lambda \eta\mu(\lambda L)=0 \qquad \text{και άρα } \lambda L=n\pi \text{ για } n=1,2,..$$

Έτσι οι επιτρεπτές τιμές του λ είναι $n\pi/L$ για n ακέραιο, και έτσι οι λύσεις της εξίσωση για μηδενικές συνοριακές συνθήκες είναι

$$\Theta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n \eta\mu\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{k(n\pi)^2}{\rho\mu L^2}t}$$

Και πάλι μπορεί να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε αρχική κατανομή της θερμότητας υπάρχουν Θ_n για τα οποία υπάρχει λύση που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\Theta(0,x)=g(x)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\Theta(0,x)=g(x)$ οπότε θα πρέπει

$$\Theta(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n \eta\mu\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=g(x)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^L \eta\mu\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\eta\mu\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0 & \gamma\iota\alpha\ n\neq m\\ L/2 & \gamma\iota\alpha\ n=m\end{cases}$$

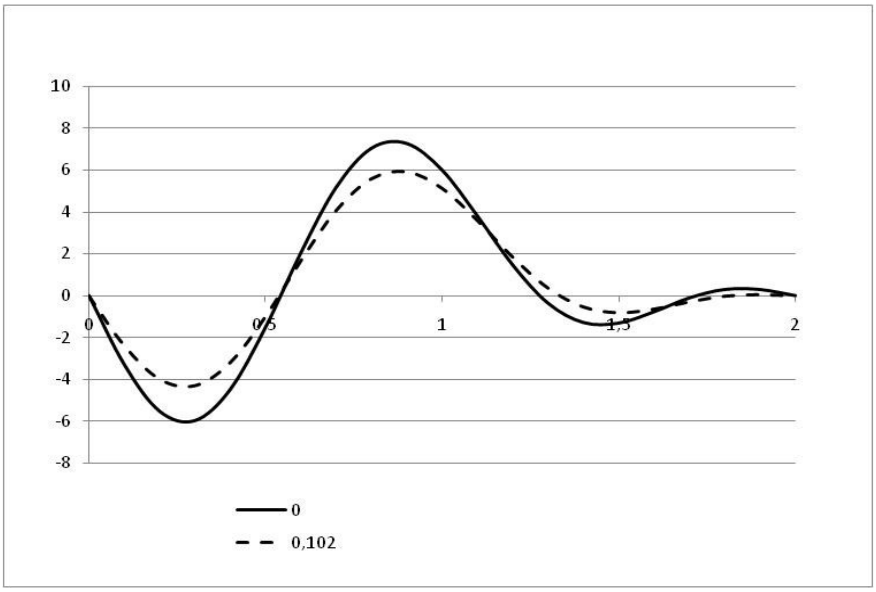
Πολλαπλασιάζοντας την προ-προηγούμενη σχέση με $\eta\mu(m\pi x/L)$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως L προκύπτει με βάση την προηγούμενη σχέση ότι

$$\Theta_m={}^2\!/_L\int_0^L g(x)\,\eta\mu\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

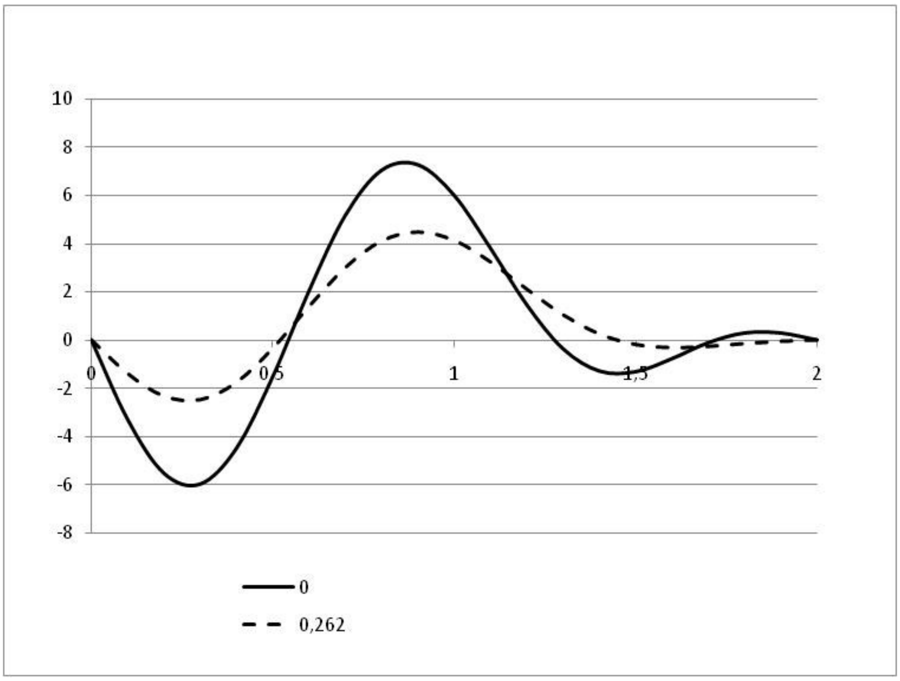
Φαίνεται εύλογο λοιπόν ότι ισχύει

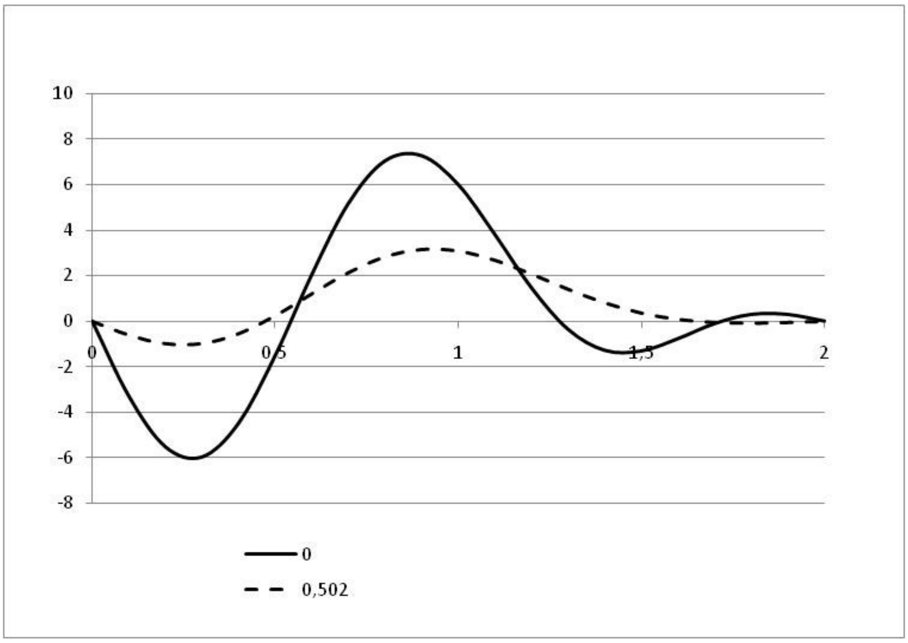
$$g(x)={}^2\!/_L\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\eta\mu\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[\int_0^L g(x)\,\eta\mu\left(\frac{n\pi y}{L}\right)dy\right]\right\}$$

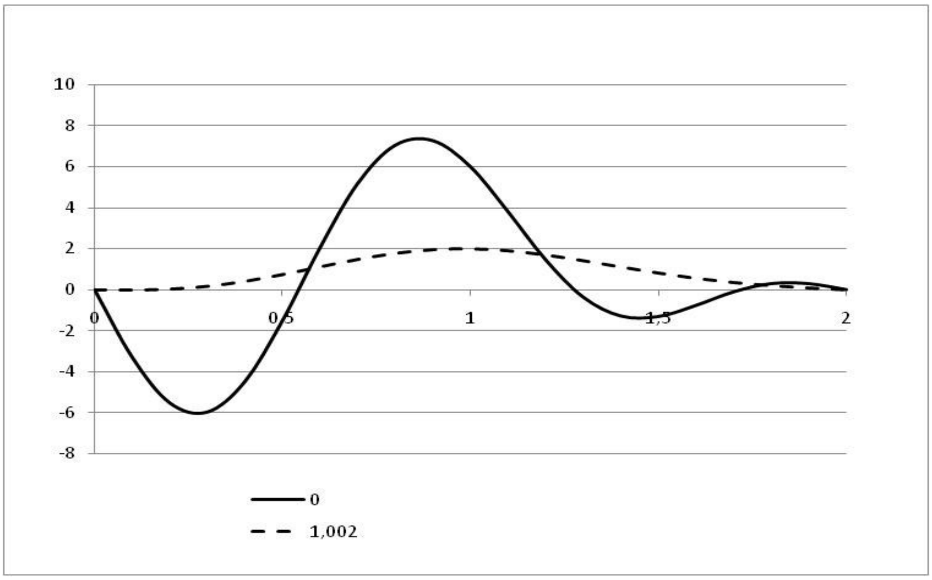
Σε περίπτωση που η g είναι συνεχής συνάρτηση η απόδειξη ότι η παραπάνω σχέση ισχύει είναι σχετικά εύκολη, διαφορετικά χρειάζονται πιο προχωρημένες μαθηματικές τεχνικές. Οι συντελεστές Θ_m που προσδιορίστηκαν με τον τρόπο αυτό ονομάζονται συντελεστές Fourier. Από την λύση της εξίσωσης της θερμότητας φαίνεται ότι η επιρροή των συνιστωσών για μεγάλα n αποσβένεται πιο γρήγορα από ό, τι των συνιστωσών χαμηλής συχνότητας, οπότε παραμένει ουσιαστικά ο όρος για *n=1*. Το παραπάνω φαίνεται και από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας που δίνεται στα παρακάτω σχήματα



Με συμπαγή γραμμή δίνεται η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας, ενώ με διακεκομμένη η θερμοκρασία την χρονική στιγμή που αναφέρεται στο διάγραμμα. Στο πρώτο διάγραμμα δίνεται η θερμοκρασία στον χρόνο 0,102 ενώ στο δεύτερο τον χρόνο 0,262 κ.λπ.







Στο τελευταίο σχήμα την χρονική στιγμή *τ=1,002* βλέπουμε ότι η κατανομή της θερμοκρασίας είναι περίπου ημιτονοειδής δηλαδή για *n=1*, ενώ οι συνιστώσες για μεγαλύτερες τιμές του *n* έχουν σχεδόν εξαλειφθεί.

Βιβλιογραφία

Για την βαρύτητα υπάρχουν εξαιρετικές παραπομπές στην Wikipedia. Κοιτάξτε ενδεικτικά τα εξής άρθρα

Newton's Laws of Motion
Escape Velocity
N-Body Problem
Gravitational Slingshot

Επίσης στο διαδίκτυο υπάρχουν εξαιρετικά ελεύθερα διαθέσιμα βιβλία. Κάνετε την σχετική αναζήτηση. Επίσης υπάρχουν πολλές βιντεοσκοπημένες παραδόσεις από εισαγωγικά μαθήματα Μηχανικής, ορισμένες σε εξαιρετικό επίπεδο.

Στην Wikipedia κοιτάξτε τα άρθρα Wave Equation, Heat Equation καθώς και το πώς λύνονται με ανάλυση Fourier. Στα άρθρα αυτά θα βρείτε ενδιαφέρουσες animations που προκύπτουν με αριθμητική επίλυση των σχετικών εξισώσεων.

Η ανάλυση Fourier είναι από τους σημαντικότερους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Ασκήσεις

1. Γράψτε την έκφραση για την δυναμική ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε ότι η συνολική ενέργεια ενός σωματίου που είναι συνδεδεμένη με το ελατήριο είναι σταθερή.
2. Ένα ελατήριο έχει δύναμη επαναφοράς $-kx^3$. Ποια είναι η ενέργειά του; Στον χρόνο 0 ένα σωμάτιο γνωστής μάζας που συνδέεται με το ελατήριο βρίσκεται σε απόσταση x_0 από την θέση ηρεμίας του. Ποια η ταχύτητά του όταν βρίσκεται στην θέση ηρεμίας του ελατηρίου;
3. Ένας αρμονικός ταλαντωτής αντιμετωπίζει δύναμη τριβής ανάλογη και αντίθετη με την ταχύτητα και συντελεστή τριβής μ. Γράψτε την σχετική διαφορική εξίσωση και λύστε την.
4. Ρίχνουμε ένα σωμάτιο με ταχύτητα v και με γωνία φ. Αν εξασκείται τριβή ανάλογη με την ταχύτητα και συντελεστή μ, γράψτε τις εξισώσεις της τροχιάς του σωματίου.
5. Έστω ότι η βαρύτητα ήταν δύναμη της μορφής $1/x^4$. Θα ίσχυε τότε ο κατά προσέγγιση τύπος της δυναμικής ενέργειας για μικρά ύψη;
6. Πώς επεκτείνεται η ανάλυση της βαρύτητας σε τρείς διαστάσεις;
7. Γράψτε τις εξισώσεις της βαρύτητας για δύο σώματα δεδομένων μαζών. Οι επιδράσεις του ενός στο άλλο είναι ίσες στο μέτρο αλλά αντίθετες κατά την διεύθυνση. Τι ισχύει για τρία σώματα;
8. Γράψτε ένα πρόγραμμα προσομοίωσης της κίνησης τριών σωμάτων. Οι τροχιές που μπορούν να παρατηρηθούν είναι «χαοτικές» - επιβεβαιώστε το.
9. Οι τροχιές των πλανητών είναι κατά μεγάλη προσέγγιση κυκλικές - συμβουλευτείτε το σχετικό άρθρο στην Wikipedia. Με την παραδοχή της κυκλικότητας, αν η περίοδος περιστροφής του Άρη είναι 687 ημέρες, ποια η σχέση της απόστασης του Άρη από τον Ήλιο σε σχέση με την απόσταση της Γής από τον Ήλιο;
10. Γράψτε σε φύλλο λογισμικού ένα «πρόγραμμα» που λύνει την εξίσωση του κύματος και την εξίσωση μετάδοσης της θερμότητας και παρατηρείστε τις λύσεις που προκύπτουν από την αριθμητική σας λύση. Συγκρίνατέ τις με τις αναλυτικές λύσεις που προκύπτουν για απλές συνοριακές συνθήκες με ανάλυση Fourier.