ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Φ. ΜΑΓΕΙΡΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Αθήνα

Ιούνιος 2014

Περιεχόμενα

4.1 Γενικά 3
4.2 Το πρόβλημα του ακέραιου σακκιδίου – Integer Knapsack 3
4.3 Προβλήματα Ελάχιστης Διαδρομής 5
4.4 Προβλήματα Ελάχιστης Διαδρομής - Η Γενική Περίπτωση 6
4.5 Κατανομή πόρων 9
4.6 Το 0 – 1 Σακκίδιο 12
4.7 Προγραμματισμός παραγωγής 13
4.8 Υπόδειγμα Wagner - Whitin 19
4.9 Πώληση αντικειμένου 26
4.10 Ασκήσεις 27
4.11 Βιβλιογραφία 27

4.1 Γενικά

Η μέθοδος του **Δυναμικού Προγραμματισμού** εφαρμόζεται όταν έχουμε πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου υπάρχει δυναμική (δηλαδή έχουμε ένα σύστημα που εξελίσσεται στο χρόνο ή με βάση κάποιο άλλο μέτρο) και το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι αθροιστικό ως προς το χρόνο: τα κέρδη κάθε χρονικής περιόδου (σταδίου) αθροίζονται. Με την χρήση του Δυναμικού Προγραμματισμού επιτυγχάνεται σημαντική απλοποίηση της λύσης πολλών προβλημάτων.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι εξέλιξη μιας παλιάς ιδέας από τον κλάδο των Μαθηματικών που ονομάζεται «Λογισμός των μεταβολών» των Hamilton, Jacobi (1850) αλλά και του Κ. Καραθεοδωρή (1930). Ο R. Bellman (1950) αναδιατύπωσε τις αρχές αυτές έτσι ώστε οι σχετικοί υπολογισμοί να είναι πιο αποτελεσματικοί.

Η παρουσίαση της τεχνικής γίνεται εύλογη με ορισμένα παραδείγματα.

4.2 Το πρόβλημα του ακέραιου σακκιδίου – Integer Knapsack

Εστω N υποψήφιοι προς επιλογή τύποι αντικειμένων. Ο κάθε τύπος j χαρακτηρίζεται από ένα «βάρος» β_j και μία «αξία» α_j. Έστω επίσης ότι διαθέτουμε ένα σακκίδιο που αντέχει συνολικά βάρος Μ (όλες οι παράμετροι θεωρούνται θετικοί ακέραιοι). Το ερώτημα είναι πόσα αντικείμενα θα διαλέξουμε από κάθε τύπο για να μεγιστοποιήσουμε την αξία του περιεχομένου του σακκιδίου. Σε όρους βελτιστοποίησης, να προσδιορισθούν ακέραια x_j τέτοια ώστε $max \sum_{j=1}^{N} a_j x_j$ και έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{N} \beta_j x_j \leq M$. Η λύση του προβλήματος αυτού δεν είναι εύκολη! Μπορούμε όμως να το βρούμε μία αναδρομική μέθοδο επίλυσής του ως εξής.

Έστω ότι διαθέτουμε ένα μαντείο που για το παραπάνω πρόβλημα μας δίνει την αξία της βέλτιστης λύσης. Φυσικά η απάντηση θα εξαρτηθεί από τις παραμέτρους του προβλήματος *α,β,Μ*. Θα μας ενδιαφέρει στο συγκεκριμένο πρόβλημα μόνο η μεταβολή της παραμέτρου Μ οπότε γράφουμε την απάντηση του μαντείου ως μία συνάρτηση «βελτίστου» *f(M)*, έχουμε δηλαδή τον ορισμό:

f(M) = Η τιμή του $\sum_{j=1}^{N} a_j x_j$ για τα βέλτιστα x_j που ικανοποιούν τους περιορισμούς $\sum_{j=1}^{N} \beta_j x_j \leq M$

Θα εντοπίσουμε τις ιδιότητες της *f* ώστε να μπορέσουμε να την υπολογίσουμε με αναδρομικό τρόπο. Κατ' αρχήν είναι σαφές ότι η f είναι μηδέν για Μ μικρότερο από το μικρότερο βάρος β_j , και αυτή η παρατήρηση αποτελεί το «ξεκίνημα» του υπολογισμού. Έστω τώρα ότι εξετάζουμε μία αυθαίρετη φόρτωση, που αποτελείται από ένα αντικείμενο επιτρεπτού τύπου j (τέτοιου δηλαδή ώστε $\beta_j \leq M$) και στην συνέχεια φορτώνει την υπόλοιπη χωρητικότητα του σακκιδίου $M - \beta_j$ κατά βέλτιστο τρόπο (που υποτίθεται ότι μας φανερώνει το μαντείο). Η φόρτωση αυτή έχει αξία $\alpha_j+f(M - \beta_j)$ και βέβαια δεν είναι βέλτιστη, οπότε ισχύει $\alpha_j+f(M - \beta_j) \leq f(M)$ για κάθε επιτρεπτό τύπο αντικειμένου. Αρα η ίδια σχέση ισχύει και για τον «καλύτερο» τύπο αντικειμένου, και έτσι έχουμε

$$\max_{j\ \varepsilon\pi\iota\tau\rho\varepsilon\pi\tau\acute{o}}\{a_j + f(M - \beta_j)\} \leq f(M) \qquad (\alpha)$$

Θα δούμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισοισότητα από την (α). Έστω λοιπόν η βέλτιστη φόρτωση για χωρητικότητα Μ και έστω ένας τύπος j* το οποίο περιλαμβάνεται στην φόρτωση αυτή. Τότε είναι σαφές ότι τα υπόλοιπα αντικείμενα στην βέλτιστη φόρτωση έχουν συνολικό βάρος το πολύ $M – \beta_{j*}$ και επομένως έχουν αξία $f(M - \beta_j)$ διότι αν είχαν μικρότερη αξία η φόρτωση δεν θα ήταν βέλτιστη. Κατά συνέπεια ισχύει $\alpha_{j*}+f(M - \beta_{j*}) = f(M)$. Όμως η αριστερή παράσταση είναι μικρότερη από το θεωρητικό μέγιστο της παράστασης αυτή ως προς τους τύπους, είναι δηλαδή

$$f(M)= \alpha_{j*}+f(M - \beta_{j*}) \leq max_{j\ \varepsilon\pi\iota\tau\rho\varepsilon\pi\tau\acute{o}}\{\alpha_j + f(M - \beta_j)\} \quad (\beta)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (α) και (β) έχουμε την λεγόμενη εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού για το πρόβλημα του Σακκιδίου

$$max_{j\ \varepsilon\pi\iota\tau\rho\varepsilon\pi\tau\acute{o}}\{\alpha_j + f(M - \beta_j)\} = f(M) \qquad (\Delta\Pi)$$

Η σχέση (ΔΠ) λοιπόν μπορεί να επιλυθεί αναδρομικά από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές του Μ. Συγκεκριμένα, αν γνωρίζουμε την τιμή της f για τιμές του Μ μικρότερες του ακεραίου Χ, τότε ο υπολογισμός του f(X) με βάση την ΔΠ είναι εφικτός εφόσον στηρίζεται στην γνώση της f για ορίσματα μικρότερα του Χ (και μάλιστα μόνο για τις τιμές $X-\beta_j$ – και αυτό σημαίνει ότι αν τα βάρη έχουν ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδας ο υπολογισμός διευκολύνεται συστηματικά!).

Παράδειγμα υπολογισμού

Έστω τρείς τύποι αντικειμένων με χαρακτηριστικά που δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Τύπος	**Α**	**Β**	**Γ**
Αξία	4	5	6
Βάρος	3	4	5

Προφανώς $f(m)=0$ για βάρη 0,1,2. Επίσης είναι προφανώς $f(3)=4$. Τώρα

$f(4) = min\{4+f(1);5+f(0)\} = min\{4;5\} = 5$ *και*

$f(5) = min\{4+f(2);5+f(1);6+f(0)\} = min\{4;5;6\}=6.$

Στο $f(6)$ ο υπολογισμός είναι λίγο πιο ενδιαφέρων: Είναι

$f(6)=min\{4+f(3);5+f(2);6+f(1)\}= min\{8;5;6\}=8$

$f(7)=min\{4+f(4);5+f(3);6+f(2)\}= min\{9;9;6\}=9$

$f(8)=min\{4+f(5);5+f(4);6+f(3)\}= min\{10;10;10\}=10$

$f(9)=min\{4+f(6);5+f(5);6+f(4)\}= min\{12;11;11\}=12$

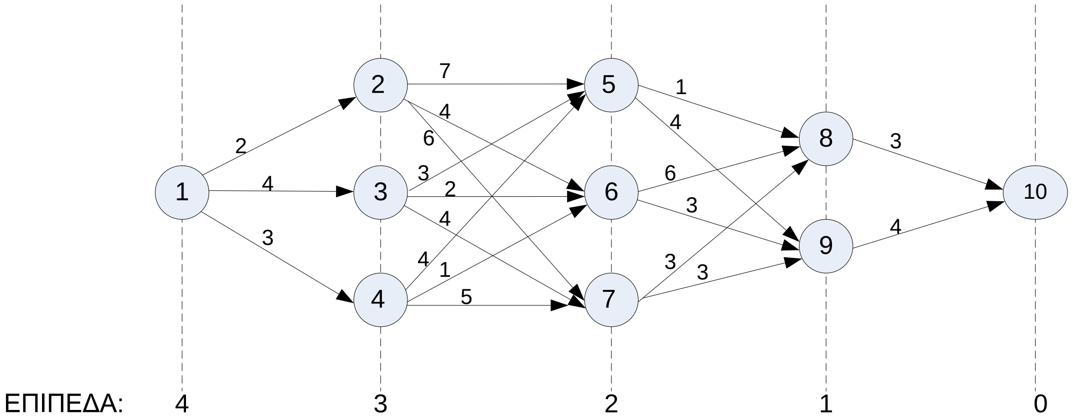
$f(10)=min\{4+f(7);5+f(6);6+f(5)\}= min\{13;13;12\}=13$

Σαν άσκηση, προχωρήστε τον υπολογισμό έως m=12. Επίσης σκεφτείτε πώς θα γράφατε ένα πρόγραμμα που να υλοποιούσε τον υπολογισμό αυτό.

Η επιλογή των αντικειμένων γίνεται παρατηρώντας ότι αν για ένα είδος αντικειμένου j* ισχύει $f(M)=\alpha_{j*}+f(M - \beta_{j*})$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο τέτοιου τύπου στην βέλτιστη φόρτωση – γενικά αν για κάποιο ακέραιο k ισχύει $f(M)= k\alpha_{j*}+f(M - k\beta_{j*})$ τότε στην βέλτιστη φόρτωση περιλαμβάνονται k αντικείμενα του τύπου αυτού. Με βάση αυτήν την παρατήρηση εξετάζουμε την βέλτιστη φόρτωση σε σακκίδιο χωρητικότητας 10. Εφόσον f(10)=4+f(7)=13 υπάρχει ένα τουλάχιστον αντικείμενο τύπου Α. Εφόσον f(7)=9=4+f(4) υπάρχει άλλο ένα αντικείμενο τύπου Α. Τέλος εφόσον f(4)=5 υπάρχει ένα αντικείμενο τύπου Β. Έτσι η βέλτιστη φόρτωση είναι 2 τύπου Α αξίας 8 και ένα τύπου Β αξίας 5. Σαν άσκηση προσδιορίστε την βέλτιστη φόρτωση για χωρητικότητα 11,12.

4.3 Προβλήματα Ελάχιστης Διαδρομής

Έστω το παρακάτω γράφημα που προκύπτει από κάποια εφαρμογή και εμφανίζεται σε στάδια ή επίπεδα («χρονικές» περιόδους).



Ποια διαδρομή από το 1 στο 10 ελαχιστοποιεί το άθροισμα στοιχειών κόστους που εμφανίζονται στις πλευρές; Παραδείγματος χάριν, η διαδρομή

$$1 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{6} 8 \xrightarrow{3} 10$$

έχει κόστος 4+2+6+3=15, ενώ η διαδρομή

$$1 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{3} 10$$

έχει κόστος 3+4+1+3=11.

Το παραπάνω γράφημα αναλύεται σε 5 επίπεδα (0-4) όπου οι πλευρές οδηγούν από το *n* στο *n-1* επίπεδο.

Η ***βασική ιδέα του Δυναμικού Προγραμματισμού*** είναι να θεωρηθεί γνωστή η συνάρτηση «βέλτιστης αξίας». Συγκεκριμένα, έστω $f_n(s)$ το ελάχιστο δυνατό (βέλτιστο) κόστος μετάβασης από τον κόμβο s του επιπέδου n στον τελικό κόμβο, που στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ο κόμβος 10. Στην συνέχεια διερευνούμε τις ιδιότητες της f_n, θεωρώντας την γνωστή, και κατόπιν, με βάση τις ιδιότητες αυτές κατασκευάζουμε ένα αλγόριθμο υπολογισμού της f_n.

Έστω ότι από τον κόμβο s συνεχίζουμε αυθαίρετα κατά την πλευρά (s,x_n) και μεταβαίνουμε στην κορυφή x_n που ανήκει βέβαια στο επίπεδο $n-1$. Παρατηρούμε από τον ορισμό της f_n, το καλύτερο κόστος εφεξής συμβολίζεται ως $f_{n-1}(x_n)$. Το συνολικό κόστος της διαδρομής εκείνης που χρησιμοποιεί την πλευρά x_n και την καλύτερη εφεξής διαδρομή είναι $r(s,x_n)+f_{n-1}(x_n)$ όπου $r(s,x_n)$ είναι το κόστος επί της πλευράς (s,x_n). Όμως η διαδρομή αυτή δεν είναι βέλτιστη, καθώς το x_n είναι αυθαίρετο και άρα $f_n(s) \le r(s,x_n)+f_{n-1}(x_n)$ για κάθε πλευρά (s,x_n). Αλλά αφού η σχέση ισχύει για κάθε πλευρά θα πρέπει

$$f_n(s) \le \min_{\text{για κάθε πλευρά } (s,x_n)} \big(r(s,x_n) + f_{n-1}(x_n)\big) \qquad (1)$$

Έστω τώρα ότι γνωρίζαμε τη βέλτιστη πλευρά συνέχισης (s,x^*) που θα οδηγούσε στην κορυφή x^*. Προφανώς η βέλτιστη διαδρομή συνεχίζει βέλτιστα από το x^* και μετά (διαφορετικά δεν θα ήταν συνολικά βέλτιστη). Επομένως θα πρέπει

$$f_n(s) = [r(s,x^*) + f_{n-1}(x^*)]$$

Όμως η δεξιά πλευρά της σχέσης ικανοποιεί την προφανή ανισότητα

$$r(s,x^*) + f_{n-1}(x^*) \ge \min_{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\ (s,x_n)} [r(s,x_n) + f_{n-1}(x_n)]$$

που συνεπάγεται

$$f_n(s) = r(s,x^*) + f_{n-1}(x^*) \ge \min_{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\ (s,x_n)} [r(s,x_n) + f_{n-1}(x_n)] \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) συνεπάγονται

$$f_n(s) = \min_{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\ (s,x_n)} [r(s,x_n) + f_{n-1}(x_n)] \qquad (3)$$

Η (3) ονομάζεται και Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού (ΔΠ) για το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής. Λύνουμε την εξίσωση βηματικά ως εξής:

Προφανώς αν ξέρουμε τις τιμές της $f_{n-1}(s)$ για όλες τις κορυφές s στο επίπεδο n-1, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράσταση υπό ελαχιστοποίηση στο δεξί σκέλος στην (3) για κάθε x_n και να βρούμε το ελάχιστο, πράγμα που δίνει το $f_n(s)$. Άρα αν ξέρουμε το f_0 υπολογίζουμε το f_1, μετά το f_2 κλπ. Βέβαια η μέθοδος αυτή δεν είναι ικανοποιητική όταν τα επίπεδα n είναι πολλά, οπότε επιθυμούμε να έχουμε κάποιο αναλυτικό τύπο υπολογισμού, κάτι που όμως συχνά δεν είναι δυνατό. Κατ' αυτήν την έννοια η εξίσωση Δ. Π. είναι γενικά μία εξίσωση διαφορών και θα θέλαμε να έχουμε μία «αναλυτική λύση».

Παράδειγμα

Για το παραπάνω γράφημα έχουμε:

$f_0(10)=0$ εξ' ορισμού.
$f_1(9)=min\{4+f_0(10)\}=4$
$f_1(8)=min\{3+f_0(10)\}=3$
$f_2(7)=min\{3+f_1(9), 3+f_1(8)\}= min\{3+4, 3+3\}=6$
$f_2(6)=min\{3+f_1(9), 6+f_1(8)\}= min\{7, 9\}=7$
$f_2(5)=min\{4+f_1(9), 1+f_1(8)\}= min\{8, 4\}=4$
$f_3(4)=min\{5+f_2(7), 1+f_2(6), 1+f_2(5)\}= min\{5+6, 1+7, 4+4\}=8$
$f_3(3)=min\{4+f_2(7), 2+f_2(6), 3+f_2(5)\}= min\{4+6, 2+7, 3+4\}=7$
$f_3(2)=min\{6+f_2(7), 4+f_2(6), 7+f_2(5)\}= min\{6+6, 4+7, 7+4\}=11$
$f_4(1)=min\{2+f_3(2), 4+f_3(3), 3+f_3(4)\}= min\{2+11, 4+7, 3+8\}=11$

Άρα η βέλτιστη διαδρομή έχει κόστος 11! □

□

Η λύση της εξίσωσης ΔΠ μας δίνει την συνάρτηση «ελάχιστου κόστους» αλλά δεν είναι σαφές πώς εντοπίζουμε την βέλτιστη διαδρομή, δηλαδή τις πλευρές που θα χρησιμοποιήσουμε. Προφανώς αν $f_n(s) = [r(s, x^*) + f_{n-1}(x^*)]$, τότε η πλευρά (s,x*) ανήκει στη βέλτιστη διαδρομή. Η κατασκευή της βέλτιστης διαδρομής γίνεται επιλέγοντας μία διαδρομή από την αρχική στην τελική κορυφή περιοριζόμενοι σε πλευρές που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα. Η αρχή αυτή υλοποιείται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα κατασκευής της βέλτιστης διαδρομής:

Από το 1 είναι βέλτιστες οι πλευρές (1,3) και (1,4). Από την κορυφή 3 η πλευρά (3,5) είναι βέλτιστη. Από την 5 η (5,8) και από την 8 η πλευρά (8,10). Δηλαδή η διαδρομή που επιλέγεται με αυτόν τον τρόπο είναι η 1→3→5→8→10 που έχει κόστος 4+3+1+3 που ισούται με 11, όπως ακριβώς το ελάχιστο κόστος που έχουμε από την λύση της εξίσωσης Δυναμικού Προγραμματισμού.

Παρατηρείστε ότι από την κορυφή 4 τόσο η πλευρά (4,6) όσο και η (4,5) είναι βέλτιστες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο βέλτιστες διαδρομές. Η βέλτιστη που διέρχεται από την κορυφή 5 είναι η 1→4→5→8→10 που έχει κόστος 3+4+1+3=11 ενώ αυτή που διέρχεται από το 6 είναι η 1→4→6→9→10 πάλι με κόστος 11.

4.4 Προβλήματα Ελάχιστης Διαδρομής - Η Γενική Περίπτωση

Έστω τώρα το γενικό πρόβλημα της εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ όπου ΔΕΝ ορίζονται κατ' ανάγκη επίπεδα. Το σύνολο $V=(V_1,..,V_n)$ υποδηλώνει τις κορυφές, ενώ το E αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών, δηλαδή είναι $E\subseteq V\times V$. Σε κάθε πλευρά (v_i,v_j) ορίζεται ένα «κόστος» από την συνάρτηση $d(v_i,v_j)$.

Μπορούμε εύκολα να γράψουμε μία εξίσωση ΔΠ για το πρόβλημα βέλτιστης (ελάχιστης) διαδρομής από την κορυφή s στην κορυφή t. Έστω $f(v)$ το ελάχιστο κόστος μετάβασης από μια κορυφή v στην t. *Προσοχή*: δεν κάνουμε παραδοχή για ύπαρξη επιπέδων οπότε η συνάρτηση ελαχίστου κόστους δεν έχει δείκτη που αντιστοιχεί σε επίπεδα.

Θεωρούμε πρώτα μία αυθαίρετη γειτονική κορυψή της s έστω w. Η ελάχιστη απόσταση από το w στο t είναι εξ' ορισμού f(w). Εφόσον όμως η διαδρομη από την s στην w και από εκεί στο t δεν είναι βέλτιστη θα πρέπει $r(s,w)+f(w)\geq f(s)$, και επειδή η σχέση ισχύει για κάθε w, θα ισχύει και για το w που ελαχιστοποιεί την παράσταση r(s,w)+f(w). Επομένως θα είναι

$$f(s)\leq min_{w\ \text{εφικτό}}\{ r(s,w)+f(w)\} \qquad (4.1)$$

Έστω τώρα ότι η βέλτιστη διαδρομή από το s μεταβαίνει αμέσως στον (άγνωστο) κόμβο w*. Είναι σαφές ότι το υπόλοιπο της διαδρομής από το w στο t πρέπει να είναι βέλτιστο, και επομένως ισχύει $f(s)=r(s,w^*)+f(w^*)$. Αλλά από τον ορισμό του ελαχίστου ισχύει ότι $min_{w\ \text{εφικτό}}\{ r(s,w)+f(w)\}\leq r(s,w^*)+f(w^*)$ καθώς το w* είναι εφικτό. Έτσι έχουμε τελικά

$$f(s)=r(s,w^*)+f(w^*)\geq min_{w\ \text{εφικτό}}\{ r(s,w)+f(w)\} \qquad (4.2)$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις (4.1) και (4.2) ότι:

$$f(w) = \min_{\text{για κάθε πλευρά } (s,w)}[r(s,w) + f(w)] \qquad (4)$$

όπου $f(t)=0$ αν η συνάρτηση κόστους d είναι μη αρνητική. Όμως αν η d παίρνει και αρνητικές τιμές, ενδέχεται να μπορούμε να επιτύχουμε $f(t)<0$. Μπορείτε να σκεφτείτε ένα τέτοιο παράδειγμα;

Προσοχή: Αφού δεν υπάρχουν επίπεδα ο τρόπος λύσης δεν είναι προφανής. Πώς μπορούμε να την λύσουμε; Κατ' αρχήν η εξίσωση ΔΠ μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού. Ωστόσο, η επίλυση του Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι υπολογιστικά ικανοποιητική, και έτσι σπάνια χρησιμοποιείται αυτή η αναγωγή.

Είναι γνωστό όμως ότι σε ένα ***ακυκλικό γράφημα*** μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε επίπεδα. Συγκεκριμένα, σε ένα ακυκλικό γράφημα υπάρχει πάντα μία ολική διάταξη, δηλαδή μία μετάθεση των κορυφών κατά μία σειρά $v_1,v_2,..,v_n$ τέτοια ώστε όλες οι πλευρές είναι της μορφής (v_κ,v_μ) με $\mu>\kappa$, δηλαδή αν επανασχεδιάσουμε το γράφημα κατά την σειρά κορυφών $v_1,v_2,..,v_n$ από αριστερά προς τα δεξιά, όλες οι πλευρές «δείχνουν» προς τα δεξιά. Τότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ΔΠ κατά την αντίστροφη σειρά κορυφών. Έστω συγκεκριμένα ότι έχουμε λύσει την εξίσωση και έχουμε προσδιορίσει τις τιμές της f για όλα τα v_λ,v_κ για $\lambda>\kappa$. Μπορούμε τότε να προσδιορίσουμε την τιμή της f στην κορυφή v_κ εφόσον προσδιορίζεται από την σχέση

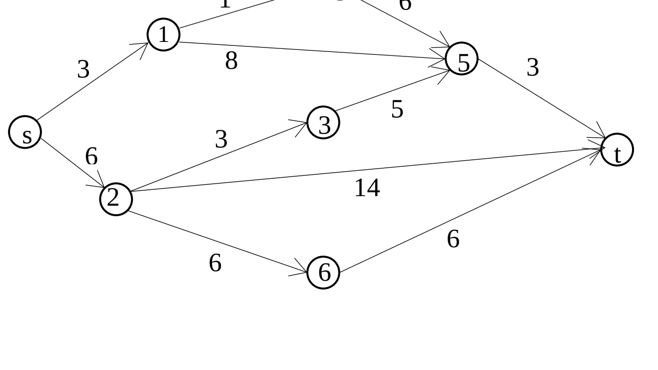
$$f(v_k) = \min_{\text{για } \lambda>\kappa}[r(v_\kappa, v_\lambda) + f(v_\lambda)]$$

και η τιμή της f είναι γνωστή για $\lambda>\kappa$!

> Η επιθυμητή σειρά κατασκευάζεται ως εξής: Εντοπίζουμε κάποια κορυφή για την οποία δεν υπάρχουν πλευρές με την κορυφή αυτή σαν αρχή. Πάντοτε υπάρχουν τέτοιες κορυφές, διαφορετικά το γράφημα δεν θα ήταν ακυκλικό. Η κορυφή αύτη τοποθετείται τελευταία και στην συνέχεια αφαιρείται από το γράφημα, καθώς και όλες οι πλευρές που έχουν αυτή σαν τέλος. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο γράφημα που υπολείπεται, έως ότου εξαντληθούν όλες οι κορυφές. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή στα Διακριτά Μαθηματικά και στους Αλγορίθμους ως ***Τοπολογική Ταξινόμηση***

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω γράφημα



Επιβεβαιώστε ότι μία τοπολογική ταξινόμηση είναι η σειρά κορυφών *s,1,4,2,3,5,6,t*. Εντοπίστε και άλλες τοπολογικές ταξινομήσεις. Για τα κόστη που αναφέρονται στο γράφημα είναι

$f(t)=0$
$f(6)=d(6,t)+f(t)=6$
$f(5)=d(5,t)+f(t)=3$
$f(3)=d(3,5)+f(5)=5+3=8$
$f(2)=\min\{d(2,3)+f(3),d(2,6)+f(6),d(2,t)+f(t)\}= \min\{3+8,6+6,14\}=11$
$f(4)=d(4,5)+f(5)=6+3=9$
$f(1)=\min\{d(1,5)+f(5),d(1,4)+f(4)=\min\{8+3,1+9\}=10$
$f(s)=\min\{d(s,1)+f(1), d(s,2)+f(2)\}=\min\{3+10,1+11\}=12$

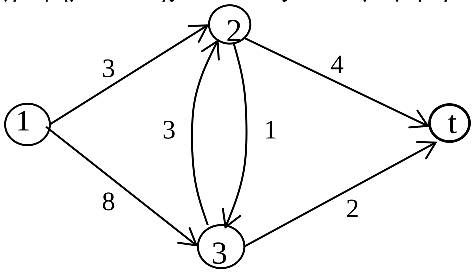
Η βέλτιστη διαδρομή βρίσκεται εντοπίζοντας τις «βέλτιστες» πλευρές, όπως δείχτηκε προηγουμένως. Έτσι από το s η επόμενη κορυφή είναι η 2, από την 2 η 3, από την 3 η 5 από την 5 η t, με συνολικό κόστος 1+3+5+3=12.

Αν σε ένα γράφημα υπάρχουν κύκλοι, και εφόσον η συνάρτηση κόστους *d* είναι μη αρνητική ένας τρόπος λύσης δίνεται από τον αλγόριθμο του Dijkstra, που μπορεί να θεωρηθεί και σαν μία μέθοδος προσδιορισμού μιας σειράς κορυφών με την παραπάνω ιδιότητα, ότι δηλαδή όλες οι επόμενες κορυφές έχουν ήδη προσδιορισμένη αξία. Σε αυθαίρετο γράφημα όπου το κόστος σε ορισμένες πλευρές μπορεί να είναι αρνητικό, η εξίσωση λύνεται με τις μεθόδους Bellman-Ford και Floyd-Warshall. Η πρώτη μέθοδος έχει και εφαρμογές στη δρομολόγηση πακέτων σε δίκτυα.

Η μέθοδος Dijkstra προσδιορίζει την σειρά υπολογισμού κατά την διάρκεια του υπολογισμού. Συγκεκριμένα, έστω ότι σε κάποιο βήμα του υπολογισμού έχουμε προσδιορίσει την f σε ένα σύνολο κορυφών S που φυσικά περιλαμβάνει την t. Για κάθε κορυφή του γραφήματος v προσδιορίζουμε την ελάχιστη απόστασή της από το t μέσω του S, δηλαδή υπολογίζουμε το μέγεθος $f_S(v)=\min_{s\in S}[r(v,s)+f(s)]$. Στην συνέχεια εντοπίζομε την κορυφή v* με την μικρότερη τιμή του f_S, δηλαδή $f_S(v^*)=\min_{v\in V} f_S(v)$. Ισχύει ότι $f(v^*)= f_S(v^*)$! Διότι αν εξετάσουμε όλες τις διαδρομές από το v* προς το t, θα διέλθουν κάποια στιγμή από το S, μέσω έστω της κορυφής v_1 και θα έχουμε κόστος διαδρομής προς το t το κόστος από v* προς v_1 και στην συνέχεια από v_1 στο t. Αλλά το κόστος από v* προς v_1 είναι μη αρνητικό και το κόστος από το v_1 στο t είναι μεγαλύτερο από το κόστος μετάβασης του v*, και άρα η καλύτερη διαδρομή από το v* είναι αυτή που εντοπίσαμε.

<u>Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Dijkstra</u>

Έστω το πάρακάτω γράφημα που έχει κύκλους, αλλά με μη αρνητικά κόστη πλευρών



Καθώς το γράφημα έχει κύκλο δεν είναι δυνατόν να βρεθεί τοπολογική ταξινόμηση. Προφανώς το S αρχικά περιλαμβάνει μόνο τον τελικό κόμβο t. Στην συνέχεια η συνάρτηση f_S προφανώς υπολογίζεται μόνο στους κόμβους 2 και 3, με αξία 4 και 2 αντίστοιχα. Έτσι το S επεκτείνεται περιλαμβάνοντας και τον 3. Τώρα η f_S υπολογίζεται και δίνει 10 στον κόμβο 1 και 3 στον κόμβο 2 (που είναι καλύτερο από το 4 που είναι το κόστος άμεσης μετάβασης στο t). Έτσι το S επεκτείνεται και με τον 2. Τώρα είναι προφανής ο υπολογισμός στο 1, καθώς η βέλτιστη αξία είναι γνωστή τόσο στο 2 όσο και στο 3. Έτσι η βέλτιστη διαδρομή από το 1 είναι μέσω του κόμβου 2 με «μήκος» 6.

4.5 Κατανομή πόρων

Έστω ότι θέλουμε να κατανείμουμε έναν πόρο (που μπορεί να είναι ένα άψυχο αγαθό αλλά και εργάτες ή εργατοώρες) σε N δραστηριότητες που υποδεικνύονται με τον δείκτη j που παίρνει τιμές 1,2,..,N. Συμβολίζουμε με B τη συνολική διαθεσιμότητα του πόρου και δεν επιτρέπονται αρνητικές ποσότητες διάθεσης του πόρου (σε ορισμένες εφαρμογές επιτρέπονται και αρνητικές ποσότητες!). Αν στην δραστηριότητα j δοθεί ποσότητα x_j του πόρου έχουμε όφελος $f_j(x_j)$. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό όφελος $\sum_{j=1}^{N} f_j(x_j)$ με περιορισμό στις ποσότητες $\sum_{j=1}^{N} x_j \leq B$ και $x_j \geq 0$.

Η παραπάνω διατύπωση μπορεί να λυθεί με εφαρμογή των συνθηκών *Kuhn-Tucker* αν τα x_j θεωρηθούν πραγματικοί αριθμοί. Αν όμως τα x_j μπορούν να πάρουν μόνο διακριτές τιμές (π.χ. ακέραιες), τέτοια προσέγγιση δεν είναι εφικτή.

> Η ανάλυση Kuhn-Tucker είναι ως εξής: Έστω ότι οι συναρτήσεις f_j είναι αύξουσες, δηλαδή περισσότεροι πόροι αυξάνουν το κέρδος. Θέτουμε την Λαγκρανζιανή
> $$\sum_{j=1}^{N} f_j(x_j) + \lambda\left(B - \sum_{j=1}^{N} x_j\right) + \sum_{j=1}^{N} \nu_j x_j$$
> Οι λ,ν είναι οι πολλαπλασιαστές που πρέπει να είναι μη αρνητικοί. Λόγω συμπληρωματικότητας θα ισχύει $\lambda\left(B - \sum_{j=1}^{N} \nu_j x_j\right) = 0$ και $\nu_j x_j = 0$. Επιπλέον θα πρέπει $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ και άρα $\frac{df_j(x)}{dx} = \lambda - \nu_j \leq \lambda$. Η τιμή $\lambda=0$ θα οδηγούσε στην τετριμμένη λύση $x_j=0$ για όλα τα j, οπότε εξετάζουμε μόνο τις λύσεις με $\lambda>0$. Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι τα x_j θα πρέπει να εξαντλήσουν την διαθεσιμότητα του πόρου, δηλαδή το άθροισμά των θα ισούται με B. Επιπλέον τα οριακά κέρδη ανά δραστηριότητα που ενεργοποιείται (δηλαδή $x_j>0$) θα ισούνται μεταξύ των ($\frac{df_j(x)}{dx} = \lambda$) εφόσον τα αντίστοιχα ν μηδενίζονται. Οι δραστηριότητες που δεν ενεργοποιούνται, δηλαδή βρίσκονται σε μηδενικό επίπεδο, θα πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα $\frac{df_j(0)}{dx} \leq \lambda$.
> *Παράδειγμα*: Έστω 3 δραστηριότητες με αποδόσεις $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=3x^2$, $f_3(x)=x^3$ και υπάρχει συνολική ποσότητα 5 μονάδων, ενώ x_1,x_2,x_3 είναι οι βέλτιστες κατανεμόμενες ποσότητες στις δραστηριότητες 1,2,3. Αν το λ είναι γνωστό και ενεργοποιούνται και οι τρείς δραστηριότητες, θα πρέπει $2x_1=\lambda$, $6x_2=\lambda$, $3x_3^2=\lambda$, ή $x_1=\lambda/2$, $x_2=\lambda/6$, $x_3=(\lambda/3)^{1/2}$, πράγμα που σημαίνει ότι $x_1+x_2+x_3=\lambda/2+\lambda/6+(\lambda/3)^{1/2}=5$, που αποτελεί εξίσωση ως προς λ. Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει $\lambda=5{,}474$ οπότε $x_1=2{,}737$, $x_2=0{,}912$, $x_3=1{,}351$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς όπως ότι υπάρχουν και άλλες λύσεις, όπως η $x_1=x_2=0$, $x_3=5$! Η τελευταία φαίνεται να είναι βέλτιστη! Από αυτές η τελευταία φαίνεται βέλτιστη, αλλά η απόδειξη δεν είναι εύκολη αν δεν χρησιμοποιηθεί δυναμικός προγραμματισμός.

Αν οι κατανεμόμενες ποσότητες πρέπει να είναι ακέραιες ποσότητες, η παραπάνω προσέγγιση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Για να λύσουμε το πρόβλημα με δυναμικό προγραμματισμό θα πρέπει να εισαγάγουμε στο πρόβλημα κάποια νοητά «στάδια». Κάνουμε την εξής σκέψη:

- Έστω $J \subseteq \{1,2,..,N\}$ κάποιο σύνολο δραστηριοτήτων και έστω ότι ένα μαντείο μας πληροφορεί ποιο είναι το μέγιστο κέρδος από την κατανομή ποσότητας α στις δραστηριότητες αυτού του συνόλου. Συμβολίζουμε το κέρδος αυτό με $F_J(\alpha)$.
- Έστω τώρα άλλη δραστηριότητα j διαφορετική από τις J. Ποια η βέλτιστη κατανομή αν είχαμε στην διάθεσή μας την δραστηριότητα j αλλά και τις δραστηριότητες J;

Αν διατεθούν y μονάδες στην δραστηριότητα j, τότε απομένουν α-y μονάδες για τις δραστηριότητες στο σύνολο J. Άρα το όφελος από κατανομή y μονάδων στην δραστηριότητα j και ποσότητα α-y στις υπόλοιπες είναι $f_j(y)+F_J(\alpha-y)$, εφόσον η κατανομή στις δραστηριότητες J έχει γίνει κατά βέλτιστο τρόπο.
Αν το βέλτιστο κέρδος της κατανομής ποσότητας α στις δραστηριότητες $\{j\} \cup J$ συμβολίζεται με $F_{\{j\} \cup J}(\alpha)$, έχουμε εξ ορισμού:

$$F_{\{j\} \cup J}(\alpha) \geq f_j(y)+F_J(\alpha-y)$$

για οποιοδήποτε y μεταξύ 0 και α. Με τα ίδια επιχειρήματα όπως προηγουμένως έχουμε:

$$F_{\{j\} \cup J}(\alpha) \geq \max_{0 \leq y \leq \alpha} [f_j(y) + F_J(\alpha - y)]$$

Αλλά εφόσον για κάποιο y^*, ισχύει

$$F_{\{j\}\cup J}(\alpha) = f_j(y^*) + F_J(\alpha - y^*) \le \max_{0\le y\le \alpha}[f_j(y) + F_J(\alpha - y)]$$

προκύπτει τελικά

$$F_{(j)J}(\alpha) = \max_{0\le y\le \alpha}[f_j(y) + F_J(\alpha - y)] \qquad (5)$$

Η σχέση (5) είναι μία σχέση δυναμικού προγραμματισμού. Εδώ τα «στάδια» είναι σύνολα από δραστηριότητες: Το αρχικό στάδιο είναι κάποια δραστηριότητα, το επόμενο στάδιο η δραστηριότητα συν κάποια άλλη, και ούτω καθ' εξής. Η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί αναδρομικά, δεδομένου $F_j(x)=f_j(x)$, καθώς όταν υπάρχει μόνο μία δραστηριότητα δεν υπάρχει επιλογή ως προς την κατανομή των πόρων. Από το $F_j(x)$ υπολογίζομε το $F_{i\cup j}(x)$ και ούτω καθ' εξής. Πρακτικά, αυτό συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό φόρτο εφόσον η επίλυση πρέπει να γίνει για όλα τα δυνατά x, που αντιστοιχούν με τις διαθέσιμες ποσότητες του αγαθού. Αυτό φαίνεται ουσιαστικά στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω τέσσερεις διαθέσιμες δραστηριότητες, στις οποίες μπορούν να διανεμηθούν ακέραιες ποσότητες κάποιου αγαθού. Τα κέρδη από την κατανομή ποσότητας α στην κάθε δραστηριότητα δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Κέρδη από τις Δραστηριότητες				
Κατανεμόμενη Ποσότητα Αγαθού	Δραστηριότητα 1	Δραστηριότητα 2	Δραστηριότητα 3	Δραστηριότητα 4
1	3	2	1	4
2	3	3	1	4
3	4	3	3	4
4	5	5	4	5
5	6	5	4	5
6	7	6	4	6
7	8	6	7	6
8	8	9	8	6

Η επίλυση του δυναμικού προγραμματισμού γίνεται στους παρακάτω πίνακες

Συνολική διαθέσιμη ποσότητα	*Ποσότητα στην Δραστηριότητα 2*										
	F_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$F_{1,2}$
1	3	3	2								3
2	3	3	5	3							5
3	4	4	5	6	3						6
4	5	5	6	6	6	5					6
5	6	6	7	7	6	8	5				8
6	7	7	8	8	7	8	8	6			8
7	8	8	9	9	8	9	8	9	6		9
8	8	8	10	10	9	10	9	9	9	9	10

Στον παραπάνω πίνακα, η πρώτη στήλη F_1 δίνει τις τιμές του κέρδους όταν υπάρχει μόνο η δραστηριότητα 1 και οι ποσότητες είναι αυτές που αναγράφονται στην στήλη Συνολικής Διαθέσιμης Ποσότητας. Ισούται βέβαια με το Κέρδος από την Δραστηριότητα 1 του αρχικού πίνακα. Στις στήλες 0,1,..,8 αναφέρονται τα κέρδη που θα προκύψουν αν από την συνολική ποσότητα της γραμμής το ποσό που αναγράφεται στην στήλη διατίθεται στην 2η δραστηριότητα και το υπόλοιπο στην 1η δραστηριότητα. Τέλος η τελευταία στήλη $F_{1,2}$ δίνει το βέλτιστο κέρδος αν είναι διαθέσιμες οι δραστηριότητες 1 και 2 και είναι το μέγιστο των στοιχείων των στηλών 0,1,..,8.

Συνολική διαθέσιμη ποσότητα	*Ποσότητα στην Δραστηριότητα 3*										
	$F_{1,2}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	F_{123}
1	3	3	1								3
2	5	5	4	1							5
3	6	6	6	4	3						6
4	6	6	7	6	6	4					7
5	8	8	7	7	8	7	4				8
6	8	8	9	7	9	9	7	4			9
7	9	9	9	9	9	10	9	7	7		10
8	10	10	10	9	11	10	10	9	10	10	11

Στον παραπάνω πίνακα, η στήλη $F_{1,2}$ δίνει τις τιμές του κέρδους όταν υπάρχουν οι δραστηριότητες 1,2 και οι ποσότητες είναι αυτές που αναγράφονται στην στήλη Συνολικής Διαθέσιμης Ποσότητας. Προκύπτει βέβαια με την τελευταία στήλη του προηγούμενου πίνακα. Στις στήλες 0,1,..,8 αναφέρονται τα κέρδη που θα προκύψουν αν από την συνολική ποσότητα της γραμμής το ποσό που αναγράφεται στην στήλη διατίθεται στην 3^{η} δραστηριότητα και το υπόλοιπο στις δραστηριότητες 1,2 κατά τον βέλτιστο τρόπο. Τέλος η τελευταία στήλη $F_{1,2,3}$ δίνει το βέλτιστο κέρδος αν είναι διαθέσιμες οι δραστηριότητες 1,2 και 3, και είναι το μέγιστο των στοιχείων των στηλών 0,1,..,8.

Συνολική διαθέσιμη ποσότητα	*Ποσότητα στην Δραστηριότητα 4*										
	F_{123}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	F_{1234}
1	3	3	4								4
2	5	5	7	4							7
3	6	6	9	7	4						9
4	7	7	10	9	7	5					10
5	8	8	11	10	9	8	5				11
6	9	9	12	11	10	10	8	6			12
7	10	10	13	12	11	11	10	9	6		13
8	11	11	14	13	12	12	11	11	9	6	14

Στον παραπάνω πίνακα, η στήλη F_{123} δίνει τις τιμές του κέρδους όταν υπάρχουν οι δραστηριότητες 1,2,3 και οι ποσότητες είναι αυτές που αναγράφονται στην στήλη Συνολικής Διαθέσιμης Ποσότητας. Προκύπτει βέβαια με την τελευταία στήλη του προηγούμενου πίνακα. Στις στήλες 0,1,..,8 αναφέρονται τα κέρδη που θα προκύψουν αν από την συνολική ποσότητα της γραμμής το ποσό που αναγράφεται στην στήλη διατίθεται στην 4^{η} δραστηριότητα και το υπόλοιπο στις δραστηριότητες 1,2,3 κατά τον βέλτιστο τρόπο. Τέλος η τελευταία στήλη F_{1234} δίνει το βέλτιστο κέρδος αν είναι διαθέσιμες οι δραστηριότητες 1,2,3 και 4, και είναι το μέγιστο των στοιχείων των στηλών 0,1,..,8.

Από τους παραπάνω υπολογισμούς είναι φανερό ότι το πλήθος των υπολογισμών είναι ανάλογο του κn^2 όπου κ το πλήθος των δραστηριοτήτων και n η διαθέσιμη ποσότητα του αγαθού (που θεωρείται ακέραιος).

Η ανάθεση του αγαθού στις δραστηριότητες γίνεται κατά τρόπο ανάλογο με το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής. Έτσι, από τον τελευταίο πίνακα, τελευταία γραμμή είναι σαφές ότι η βέλτιστη αξία 14 μονάδων προκύπτει αν διατεθεί 1 μονάδα στην 4^{η} δραστηριότητα και 8-1=7 στις 1,2,3. Από τον προτελευταίο πίνακα, εξετάζοντας την προτελευταία γραμμή προκύπτει ότι η βέλτιστη αξία 11 μονάδων προκύπτει αν δοθούν 4 μονάδες στην δραστηριότητα 3, και 7-4=3 στις δραστηριότητες 1,2. Στον 1^{ο} πίνακα τέλος στην γραμμή για 3 μονάδες διαθέσιμης ποσότητας το βέλτιστο προκύπτει με κατανομή 2 μονάδων στην δραστηριότητα 2 και 3-1=1 μονάδα στην δραστηριότητα 1. Το συνολικό κέρδος θα είναι από τα κέρδη των δραστηριοτήτων $f_1(1)+f_2(2)+f_3(4)+f_4(1) = 3+3+4+4$ που όντως ισούται με 14

Άσκηση:

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα της επιλογής σας που θα λύνει το παραπάνω πρόβλημα, και θα βρίσκει τόσο την βέλτιστη τιμή του κέρδους όσο και την κατανομή του πόρου στις δραστηριότητες.

4.6 Το 0 – 1 Σακκίδιο

Η παραπάνω μεθοδολογία δυναμικού προγραμματισμού μπορεί να επεκταθεί για να λύσουμε ένα πρόβλημα σακκιδίου όπου μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ N αντικειμένων – και όχι μεταξύ N τύπων αντικειμένων. Κάθε αντικείμενο δηλαδή είτε επιλέγεται είτε όχι, δηλαδή δεν μπορούμε να επιλέξουμε ακέραιο αριθμό αντικειμένων ίδιου τύπου. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει όταν έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ N επενδυτικών σχεδίων, κάθε ένα εκ των οποίων είναι μοναδικό και μπόρεί να υλοποιηθεί το πολύ μία φορά. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι σαφές πώς θα γραφεί η συνάρτηση δυναμικού προγραμματισμού. Όμως εφαρμόζοντας την ίδια ιδέα όπως προηγουμένως γράφουμε μία συνάρτηση βελτίστου με παραμέτρους τόσο το ύψος του προϋπολογισμού B όσο και τις διαθέσιμες επενδύσεις. Συγκεκριμένα έστω

$f(B,K) =$ Το βέλτιστο όφελος αν έχουμε χωρητικότητα *B* και μπορούμε να επιλέξουμε από τα αντικείμενα *1,2,..,K*.
Προσοχή: το K είναι μεταβλητή!

Προφανώς όταν το *K* ισούται με *N* τότε έχουμε βρεί την βέλτιστη λύση.

Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής

$$f(B,K)=\max\{f(B,K-1),\ \alpha_K+f(B-\beta_K,K-1)\}$$

Η ερμηνεία της εξίσωσης είναι ενδιαφέρουσα. Έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές της $f(B,k)$ για $k=1,2,.,,K-1$ και όλα τα B (Στην πράξη μας ενδιαφέρουν μόνο χωρητικότητες B μικρότερες του αθροίσματος των βαρών των εν λόγω αντικειμένων). Έστω τώρα ότι γίνεται διαθέσιμο το αντικείμενο K. Αν δεν είναι συμφέρον να χρησιμοποιηθεί, τότε $f(B,K)= f(B,K-1)$. Αν είναι συμφέρον να χρησιμοποιηθεί η αξία της επιλογής είναι $\alpha_K+f(B-\beta_K,K-1)$, και η αξία είναι το μέγιστο από τις δύο παραστάσεις. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής και ο προσδιορισμός της βέλτιστης φόρτωσης γίνεται με πίνακες παρόμοιους με αυτούς του προηγούμενου εδαφίου. Βλέπε το παρακάτω παράδειγμα. Θεωρούμε τα 4 αντικείμενα του παρακάτω πίνακα.

Αντικείμενα				
Δείκτης	**1**	**2**	**3**	**4**
Αξία	2	3	5	8
Βάρος	3	4	6	7

Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού λύνεται στον παρακάτω πίνακα

Συναρτήσεις Αξίας - Δυναμικού Προγραμματισμού				
	Αντικείμενα			
Χωρητικότητα	**1**	**1,2**	**1,2,3**	**1,2,3,4**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	2	2	2	2
4	2	3	3	3
5	2	3	3	3
6	2	3	5	5
7	2	5	5	8
8	2	5	5	8
9	2	5	7	8
10	2	5	8	10
11	2	5	8	11
12	2	5	8	11
13	2	5	10	13

Η πρώτη στήλη είναι το τι μπορεί να επιτευχθεί για διάφορες χωρητικότητες του σακκιδίου αν μόνο το 1ο αντικείμενο είναι διαθέσιμο. Η δεύτερη στήλη αντιστοιχεί με την περίπτωση που έχουμε επιλογή από τα πρώτα δυο αντικείμενα για διάφορες χωρητικότητες κ.ο.κ. Έτσι, π.χ. αν έχουμε χωρητικότητα 13 μονάδες, και έχει υπολογισθεί η τρίτη στήλη, δηλαδή τι μπορούμε να κάνουμε με τα αντικείμενα 1,2,3, εξετάζουμε το 4ο αντικείμενο. Αν δεν χρησιμοποιηθεί, το βέλτιστο είναι 10 μονάδες όπως προκύπτει από το τελευταίο στοιχείο της 3ης στήλης. Αν χρησιμοποιηθεί το 4ο αντικείμενο θα έχουμε άμεσο όφελος 8 μονάδες και θα μείνουν 13-7=6 μονάδες για τα αντικείμενα 1-3. Η βέλτιστη φόρτωση έχει αξία 5 όπως φαίνεται από το αντίστοιχο στοιχείο της 3ης στήλης, και συνολικά 8+5=13. Άρα η βέλτιστη φόρτωση έχει αξία 13, και περιλαμβάνει το 4ο αντικείμενο. Από τον ίδιο πίνακα εξετάζοντας το βέλτιστο για 1-3 αντικείμενο με χωρητικότητα 6 βρίσκουμε και την βέλτιστη επιλογή από τα 1-3, και συγκεκριμένα ότι περιλαμβάνουμε το 3ο αντικείμενο. Έτσι το βέλτιστο σακκίδιο περιλαμβάνει το 3ο και 4ο αντικείμενο.

4.7 Προγραμματισμός παραγωγής

Έστω ότι πρέπει να προγραμματίσουμε την παραγωγή μιας παραγωγικής μονάδας που πρέπει να ικανοποιήσει ένα γνωστό πρόγραμμα παραγωγής ενός προϊόντος. Συμβολίζουμε με $d_1,d_2,..,d_n$ την συμφωνημένη ποσότητα παραγωγής στις χρονικές περιόδους $1,2,..,n$. Η παραγωγική μονάδα μπορεί να παράγει κάθε περίοδο έως α μονάδες. Γενικά, μπορεί να τηρείται απόθεμα σε μία αποθήκη που έχει χωρητικότητα το πολύ β μονάδες προϊόντος. Η αποθήκευση δεν έχει μεν απώλειες, αλλά υπάρχει κόστος αποθήκευσης. Το κόστος παραγωγής μιας περιόδου δίνεται από μία συνάρτηση (πίνακα) $c(x)$ όπου x η παραγόμενη ποσότητα την περίοδο αυτή. Το κόστος αποθήκευσης: ανάλογο της αποθηκευμένης ποσότητας δηλαδή αν η αποθηκευμένη ποσότητα είναι s, το κόστος της περιόδου είναι hs, και h το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου για μία μονάδα προϊόντος.

Πώς υπολογίζουμε βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής; Από τη μία θέλουμε μεγάλες ποσότητες παραγωγής αν έχουμε οικονομίες κλίμακας, από την άλλη όμως δεν θέλουμε μεγάλα αποθέματα που θα δημιουργηθούν αν παραγάγουμε ποσότητες προϊόντος προτού τις χρειαστούμε! Στόχος μας είναι βέβαια η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, δηλαδή του κόστους περιόδων παραγωγής αλλά και αποθήκευσης.

Έστω ότι $f_t(s)$ είναι το ελάχιστο κόστος μέχρι το τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού, όταν βρισκόμαστε στην αρχή της περιόδου t με απόθεμα στην αποθήκη ύψους s μονάδες προϊόντος. Θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της f σε μορφή μιας εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού.

Η παραγόμενη ποσότητα σε οποιαδήποτε περίοδο συμβολίζεται με x και θα πρέπει φυσικά να είναι μη αρνητική και μικρότερη ή ίση με την δυναμικότητα παραγωγής, δηλαδή $0 \leq x \leq \alpha$. Οπωσδήποτε η ποσότητα παραγωγής x πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση δηλαδή να είναι $x+s \geq d_t$. Φυσικά, αν οι ζητούμενες ποσότητες είναι υπερβολικές δεν θα υπάρχουν εφικτά προγράμματα παραγωγής. Επίσης, η υπολειπόμενη ποσότητα μετά την παράδοση της ζητούμενης ποσότητας δεν πρέπει να υπερβαίνει την δυναμικότητα της αποθήκης, δηλαδή πρέπει $x+s-d_t \leq \beta$. Το συνολικό κόστος της περιόδου θα είναι $c(x)+h(x+s-d_t)$ και αποτελείται από το κόστος παραγωγής $c(x)$ και το κόστος αποθέματος $h(x+s-d_t)$, θεωρώντας ότι το κόστος αποθέματος χρεώνεται επί του τελικού ύψους της αποθήκης. Αν το κόστος αποθέματος υπολογιζόταν με το μέσο ύψος αποθέματος θα ήταν $h(s+[x-d_t]/2)$, αλλά η μέθοδος λύσης που θα δούμε παρακάτω δεν θα άλλαζε, οπότε διατηρούμε την αρχική μορφή. Στην έναρξη της επόμενης περιόδου t+1 το ύψος αποθέματος θα είναι βέβαια $x+s-d_t$.

Επιλέγοντας μία μη απαραίτητα βέλτιστη ποσότητα παραγωγής x, και θεωρώντας ότι από την περίοδο $t+1$ και εφεξής, το κόστος θα είναι $c(x)+h(x+s-d_t)+f_{t+1}(x+s-d_t)$ που όμως είναι μεγαλύτερο από το βέλτιστο κόστος $f_t(x)$. Έτσι θα έχουμε $f_t(x) \leq c(x)+h(x+s-d_t)+f_{t+1}(x+s-d_t)$ για κάθε εφικτό x πράγμα που συνεπάγεται την σχέση

$$f_t(s) \leq \min_{s-d_t \leq x \leq \beta - s + d_t} c(x) + h(x+s-d_t) + f_{t+1}(x+s-d_t)$$

Όμως για την βέλτιστη ποσότητα παραγωγής x^* ισχύει

$$f_t(s) = c(x^*)+h(x^*+s-d_t)+f_{t+1}(x^*+s-d_t)$$

που είναι μεγαλύτερο από την δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας και κατά συνέπεια

$$f_t(s) = \min_{s-d_t \leq x \leq \beta - s + d_t} c(x) + h(x+s-d_t) + f_{t+1}(x+s-d_t) \qquad (6)$$

Στο τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού Τ, αν η ποσότητα s που υπάρχει στην αποθήκη υπερκαλύπτει την απαιτούμενη ποσότητα, το κόστος είναι μηδενικό. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει επαρκής ποσότητα, θα πρέπει να παραχθεί. Έτσι προκύπτει η «συνοριακή σχέση»

$$f_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{για } s \geq d_T \\ c(d_T - s) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η σχέση δυναμικού προγραμματισμού μας επιτρέπει το βρούμε από το f_{t+1} το f_t, και έτσι να λύσουμε το πρόβλημα για όλα τα t.

Παράδειγμα
Έστω ότι το κόστος παραγωγής δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Ποσότητα	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Κόστος	0	6	7	8	8	9	10	10	11

Υπάρχει ένα «πάγιο» κόστος παραγωγής περίπου 5 μονάδων, και η αυξανόμενη ποσότητα δημιουργεί πρόσθετο κόστος με κάποιες όμως οικονομίες κλίμακας. Η μέγιστη ποσότητα παραγωγής είναι 8 μονάδες. Το κόστος αποθεματοποιήσεως είναι ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα χρόνου είναι 0,5. Η δυναμικότητα της αποθήκης είναι 10 μονάδες.

Η ζήτηση δίνεται από τον πίνακα

Χρονική περίοδος	1	2	3	4	5	6	7
Ποσότητα	10	8	3	5	5	8	12

Η αρχική ποσότητα στην αποθήκη είναι 5 μονάδες. Υπολογίστε το πρόγραμμα παραγωγής – αποθήκευσης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για τις περιόδους αυτές. Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με δυναμικό προγραμματισμό, λύνοντας την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού παραγωγής στους παρακάτω πίνακες.

Αρχίζουμε με τον παρακάτω πίνακα:

			Χρονική Περίοδος		**7**		**Ζήτηση Περιόδου**		**8**		
	Παρα-γωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** $f_7(s)$
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	11	11
1		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	10	11	10
2		∞	∞	∞	∞	∞	∞	10	10	11	10
3		∞	∞	∞	∞	∞	9	10	10	11	9
4		∞	∞	∞	∞	8	9	10	10	11	8
5		∞	∞	∞	8	8	9	10	10	11	8
6		∞	∞	7	8	8	9	10	10	11	7
7		∞	6	7	8	8	9	10	10	11	6
8		0	6	7	8	8	9	10	10	11	0
9		0	6	7	8	8	9	10	10	11	0
10		0	6	7	8	8	9	10	10	11	0

Ο αρχικός αυτός πίνακας υλοποιεί την συνοριακή συνθήκη. Οι γραμμές αντιστοιχούν σε επίπεδα αρχικού αποθέματος και άρα είναι 11 γραμμές, ενώ οι στήλες σε επίπεδα παραγωγής και είναι 10 στήλες. Σε κάθε κελί εισάγεται το κόστος που αντιστοιχεί στον συνδυασμό αποθέματος – παραγωγής. Αν το άθροισμα αυτών δεν επαρκεί να καλύψει την ζήτηση, το κόστος είναι άπειρο, διαφορετικά ισούται με το κόστος παραγωγής. Η τελευταία στήλη είναι το ελάχιστο των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής και είναι βέβαια το ελάχιστο κόστος είναι δηλαδή η συνάρτηση $f_7(s)$. Ο υπολογισμός του δυναμικού προγραμματισμού συνεχίζεται στον επόμενο πίνακα:

Ο πίνακας αυτός υλοποιεί την σχέση δυναμικού προγραμματισμού για την $6^{η}$ περίοδο. Πάλι οι γραμμές αντιστοιχούν σε αρχικό απόθεμα, οι στήλες σε επίπεδο παραγωγής. Αν κάποιος συνδυασμός αποθέματος παραγωγής δεν επαρκεί να καλύψει την ζήτηση της περιόδου το κόστος στο αντίστοιχο κελί τίθεται άπειρο. Αν δεν είναι άπειρο, το κόστος στο κελί είναι άθροισμα του κόστους παραγωγής, αποθεματοποίησης και εφεξής κόστους. Το κόστος αποθέματος είναι το απόθεμα τέλους επί το μοναδιαίο κόστος (εδώ 0,5). Το εφεξής κόστος προκύπτει από τον προηγούμενο πίνακα, και συγκεκριμένα την τελευταία στήλη του. Έτσι, π.χ. με απόθεμα 3 και παραγωγή 5, το κόστος παραγωγής είναι $c(5)=9$. Στο τέλος της περιόδου το υπόλοιπο της αποθήκης είναι 3+5-4=4, άρα το κόστος είναι 0,5·4=2. Τέλος το εφεξής κόστος είναι το αντίστοιχο στοιχείο του προηγούμενου πίνακα, που είναι 8, δηλαδή

			Χρον. Περίοδος		6		Ζήτηση Περιόδου		4		
	Παρα-γωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** ***f*₆*(s)***
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	19	19,5	21	20,5	21	19
1		∞	∞	∞	19	18,5	20	20,5	20	21,5	18,5
2		∞	∞	18	18,5	19	19,5	20	20,5	21	18
3		∞	17	17,5	19	18,5	19	20,5	20	20,5	17
4		11	16,5	18	18,5	18	19,5	20	19,5	15	11
5		10,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	14	15,5	10,5
6		11	16,5	17	18,5	18	18,5	14	14,5	16	11
7		10,5	16	17,5	18	17,5	13	14,5	15	16,5	10,5
8		10	16,5	17	17,5	12	13,5	15	15,5	17	10
9		10,5	16	16,5	12	12,5	14	15,5	16	17,5	10,5
10		10	15,5	11	12,5	13	14,5	16	16,5	18	10

συνολικά 9+2+8=19. Επιβεβαιώστε κάποια από τα άλλα στοιχεία του πίνακα. Η τελευταία στήλη είναι το ελάχιστο των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής και είναι βέβαια το ελάχιστο κόστος της περιόδου με το δεδομένο αρχικό απόθεμα, είναι δηλαδή η συνάρτηση $f_6(s)$.

Ο πίνακας για την επόμενη περίοδο είναι ο εξής:

			Χρον. Περίοδος		5		Ζήτηση Περιόδου		5		
	Παραγωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** ***f*₅*(s)***
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	28	29	29	29,5	28
1		∞	∞	∞	∞	27	28	29	28,5	24	24
2		∞	∞	∞	27	27	28	28,5	23	24	23
3		∞	∞	26	27	27	27,5	23	23	25	23
4		∞	25	26	27	26,5	22	23	24	25	22
5		19	25	26	26,5	21	22	24	24	25	19
6		19	25	25,5	21	21	23	24	24	26	19
7		19	24,5	20	21	22	23	24	25	26	19
8		18,5	19	20	22	22	23	25	25	26,5	18,5
9		13	19	21	22	22	24	25	25,5	27	13
10		13	20	21	22	23	24	25,5	26	27,5	13

Ας δούμε το στοιχείο που αντιστοιχεί σε απόθεμα 4 και παραγωγή 4. Το κόστος παραγωγής είναι 8 ενώ μετά το τέλος της περιόδου μένουν 4+4-5=3 μονάδες, με κόστος αποθεματοποίησης 1,5. Το εφεξής κόστος $f_6(3)$ ισούται με 17, όπως προκύπτει από τον προηγούμενο πίνακα. Συνολικά το κόστος είναι 8+1,5+17=26,5.

Για την 4^{η} περίοδο έχουμε τον πίνακα:

			Χρον. Περίοδος	4		Ζήτηση Περιόδου		5		
	Παραγωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** $f_4(s)$
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	37	34,5	34	35,5	34
1		∞	∞	∞	∞	36	33,5	34	34,5	35	33,5
2		∞	∞	∞	36	32,5	33	34,5	34	32,5	32,5
3		∞	∞	35	32,5	32	33,5	34	31,5	33	31,5
4		∞	34	31,5	32	32,5	33	31,5	32	33,5	31,5
5		28	30,5	31	32,5	32	30,5	32	32,5	33,5	28
6		24,5	30	31,5	32	29,5	31	32,5	32,5	28,5	24,5
7		24	30,5	31	29,5	30	31,5	32,5	27,5	29	24
8		24,5	30	28,5	30	30,5	31,5	27,5	28	29,5	24,5
9		24	27,5	29	30,5	30,5	26,5	28	28,5	30	24
10		21,5	28	29,5	30,5	25,5	27	28,5	29	30,5	21,5

Για τις περιόδους 3,2 και 1 έχουμε τους παρακάτω πίνακες

			Χρον. Περίοδος	3		Ζήτηση Περιόδου		6		
	Παραγωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** $f_3(s)$
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	∞	44	44	44,5	44
1		∞	∞	∞	∞	∞	43	44	43,5	44	43
2		∞	∞	∞	∞	42	43	43,5	43	44,5	42
3		∞	∞	∞	42	42	42,5	43	43,5	41,5	41,5
4		∞	∞	41	42	41,5	42	43,5	40,5	38,5	38,5
5		∞	40	41	41,5	41	42,5	40,5	37,5	38,5	37,5
6		34	40	40,5	41	41,5	39,5	37,5	37,5	39,5	34
7		34	39,5	40	41,5	38,5	36,5	37,5	38,5	39,5	34
8		33,5	39	40,5	38,5	35,5	36,5	38,5	38,5	37,5	33,5
9		33	39,5	37,5	35,5	35,5	37,5	38,5	36,5	38	33
10		33,5	36,5	34,5	35,5	36,5	37,5	36,5	37	38,5	33,5

Επιβεβαιώστε κάποια από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, π. χ. το αποτέλεσμα για αρχικό απόθεμα 9 και μηδενική παραγωγή.

			Χρον. Περίοδος		**2**		**Ζήτηση Περιόδου**		**8**		
	Παραγωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** $f_2(s)$
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	55	55
1		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	54	54,5	54
2		∞	∞	∞	∞	∞	∞	54	53,5	54	53,5
3		∞	∞	∞	∞	∞	53	53,5	53	54	53
4		∞	∞	∞	∞	52	52,5	53	53	51,5	51,5
5		∞	∞	∞	52	51,5	52	53	50,5	51	50,5
6		∞	∞	51	51,5	51	52	50,5	50	48	48
7		∞	50	50,5	51	51	49,5	50	47	48,5	47
8		44	49,5	50	51	48,5	49	47	47,5	48,5	44
9		43,5	49	50	48,5	48	46	47,5	47,5	48,5	43,5
10		43	49	47,5	48	45	46,5	47,5	47,5	49,5	43

			Χρον. Περίοδος		**1**		**Ζήτηση Περιόδου**		**5**		
	Παραγωγή	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ελάχιστο Κόστος** $f_1(s)$
Απόθεμα											
0		∞	∞	∞	∞	∞	64	64,5	64,5	65,5	64
1		∞	∞	∞	∞	63	63,5	64,5	64,5	64,5	63
2		∞	∞	∞	63	62,5	63,5	64,5	63,5	64	62,5
3		∞	∞	62	62,5	62,5	63,5	63,5	63	62	62
4		∞	61	61,5	62,5	62,5	62,5	63	61	61,5	61
5		55	60,5	61,5	62,5	61,5	62	61	60,5	59	55
6		54,5	60,5	61,5	61,5	61	60	60,5	58	59	54,5
7		54,5	60,5	60,5	61	59	59,5	58	58	59	54,5
8		54,5	59,5	60	59	58,5	57	58	58	59,5	54,5
9		53,5	59	58	58,5	56	57	58	58,5	60	53,5
10		53	57	57,5	56	56	57	58,5	59	60,5	53

Από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει η απάντηση στο αρχικό ερώτημα που είναι $f_1(5)=55$ μονάδες. Το πρόγραμμα παραγωγής που επιτυγχάνει το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται ως εξής, ανατρέχοντας στους πίνακες επίλυσης της εξίσωσης.

Την $1^{η}$ περίοδο το βέλτιστο κόστος προκύπτει για μηδενική παραγωγή εφόσον το ελάχιστο προκύπτει στην στήλη της μηδενικής παραγωγής. Το υπάρχον απόθεμα 5 μονάδων επαρκεί ακριβώς για την κάλυψη της ζήτησης και έτσι την επομένη περίοδο (με νέο ορίζοντα 6 περιόδων) αναγόμαστε στο πρόβλημα με μηδενικό αρχικό απόθεμα. Εξετάζοντας την $1^{η}$ γραμμή του πίνακα για την 2η περίοδο βλέπουμε ότι $f_2(0)=55$ (ερμηνεύστε το..) και ότι το βέλτιστο προκύπτει για παραγωγή 8 μονάδων που καλύπτει ακριβώς την ζήτηση και έχει κόστος 11, με απόθεμα πάλι μηδενικό. Την επόμενη, $3^{η}$ περίοδο εξετάζουμε το $f_3(0)$ που ισούται με 44 και προκύπτει για παραγωγή 6 ή 7 μονάδων. Επιλέγουμε αυθαίρετα τις 6 μονάδες με κόστος παραγωγής 10. Εφόσον η ζήτηση της περιόδου είναι 6 μένει μηδενικό υπόλοιπο. Την επόμενη $4^{η}$ περίοδο το ελάχιστο κόστος είναι $f_4(0)$=34 και προκύπτει για παραγωγή 7 μονάδων, που έχουν κόστος παραγωγής 10, οπότε το απόθεμα τέλους περιόδου είναι 7-5=2, που έχει κόστος αποθήκευσης 1. Την επόμενη $5^η$ περίοδο το ελάχιστο κόστος είναι $f_5(2)=23$ που προκύπτει με παραγωγή 7 μονάδων και κόστος 10. Το απόθεμα στο τέλος της περιόδου είναι 7+2-5=4 με κόστος αποθήκευσης 2. Την επόμενη $6^η$ περίοδο το κόστος είναι $f_6(4)=11$ που προκύπτει με μηδενική παραγωγή και αφήνει μηδενικό απόθεμα. Την τελευταία $7^η$ περίοδο η παραγωγή είναι 8 μονάδες με κόστος 11. Τα συνολικά κόστη είναι λοιπόν

Περίοδος	**Κόστη Παραγωγής**	**Κόστη Αποθήκευσης**	**Συνολικό Κόστος**
1	0	0	0
2	11	0	11
3	10	0	10
4	10	1	11
5	10	2	12
6	0	0	0
7	11	0	11
Συνολικά	52	3	55

Η στρατηγική αυτή επιτυγχάνει όντως το συνολικό κόστος των 55 μονάδων που υπολογίσαμε στους πίνακες. Διαλέξτε ένα οποιονδήποτε άλλο πρόγραμμα παραγωγής αποθήκευσης και επιβεβαιώστε ότι το συνολικό κόστος του είναι μεγαλύτερο από αυτό του παραπάνω προγράμματος.

Είναι σαφές ότι ο χρόνος υπολογισμού είναι ανάλογος του χρονικού ορίζοντα T, αλλά και ανάλογος του γινομένου αβ, πράγμα που σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του γινομένου αυτού ο υπολογιστικός φόρτος είναι μεγάλος. Στο παρακάτω υπόδειγμα ο υπολογιστικός φόρτος είναι πολύ λιγότερος, φτάνει να ικανοποιούνται ωρισμένες απλουστευτικές συνθήκες.

4.8 Υπόδειγμα Wagner - Whitin

Στο προηγούμενο υπόδειγμα παραγωγής έστω ότι το κόστος παραγωγής είναι της μορφής:

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \gamma\iota\alpha \;\; x = 0 \\ K + \pi x & \gamma\iota\alpha \;\; x > 0 \end{cases}$$

Το κόστος δηλαδή αποτελείται από ένα πάγιο μέρος Κ και ένα καθαρά αναλογικό ως προς το επίπεδο παραγωγής. Βέβαια δεν υπάρχει πάγιο κόστος εάν δεν υπάρξει παραγωγή. Το πάγιο κόστος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κόστος προετοιμασίας της παραγωγής, που είναι το ίδιο για μικρή ή μεγάλη ποσότητα παραγωγής, αλλά δεν υπάρχει λόγος να το χρεωθούμε αν δεν θα προχωρήσουμε σε παραγωγή. Αν επιπλέον δεν υπάρχουν περιορισμοί είτε στο επίπεδο παραγωγής είτε στο επίπεδο αποθήκευση, η επίλυση γίνεται πιο εύκολη από τη γενική περίπτωση του προηγούμενου εδαφίου.

Η απλοποίηση αυτή προκύπτει από την εξής παρατήρηση. Αν ισχύουν τα παραπάνω, ένας βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής παράγει μόνον όταν το απόθεμα είναι μηδενικό. Αυτό προκύπτει με εις άτοπον απαγωγή ως εξής: Έστω ότι σε κάποια περίοδο t το βέλτιστο πρόγραμμα προδιέγραφε θετική παραγωγή ύψους $x_t>0$ ενώ η επόμενη παραγωγή γινόταν σε κάποια μελλοντική περίοδο $t+\tau$ με $x_{t+\tau}>0$. Έστω ότι την περίοδο αυτή έχουμε και μη μηδενικό απόθεμα $s_{\tau+t}>0$. Εξετάζουμε ένα εναλλακτικό πρόγραμμα παραγωγής που θα μείωνε την παραγωγή την στιγμή t κατά $\delta=min\{x_t,s_{t+\tau}\}$ και θα αύξανε την παραγωγή στο $t+\tau$ κατά δ. Η εναλλακτική αυτή στρατηγική θα οδηγούσε σε μικρότερα αποθέματα και άρα μικρότερο κόστος αποθέματος. Όσον αφορά το κόστος παραγωγής, τα μεταβλητά κόστη είναι τα ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Η υποτιθέμενη βέλτιστη παραγωγή χρεώνει δύο πάγια Κ τις στιγμές t και $t+\tau$ ενώ η εναλλακτική δύο ή λιγότερα εφόσον η παραγωγή στο t μειώνεται οπότε ενδεχομένως και μηδενίζεται, ενώ την περίοδο $t+\tau$ και τα δύο προγράμματα οπωσδήποτε επιβαρύνονται με πάγιο. Άρα μία βέλτιστη στρατηγική δεν παράγει (ή παραγγέλνει), παρά μόνον εάν το απόθεμα είναι μηδενικό. Το παραπάνω επιχείρημα στηρίζεται στο ότι α. το μεταβλητό κόστος είναι σταθερό β. δεν υπάρχουν περιορισμοί στο επίπεδο παραγωγής (ενώ ισχύει ακόμα και σε περίπτωση που υπάρχει περιορισμός στον αποθηκευτικό χώρο).

□

Με βάση αυτήν την παρατήρηση διαμορφώνουμε το εξής υπόδειγμα Δυναμικού Προγραμματισμού. Θεωρούμε πάλι χρονικό ορίζοντα περιόδων t=1,2,..,T, κατά τις οποίες πρέπει να εξυπηρετηθεί ζήτηση d_t, χωρίς καθυστερήσεις. Το κόστος παραγωγής είναι της μορφής πάγιο συν μεταβλητό όπως αναφέρθηκε παραπάνω και υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο ύψους hs όπου s η ποσότητα τέλους περιόδου – ακριβώς όπως στο προηγούμενο υπόδειγμα. Επίσης δεν υπάρχει περιορισμός στην παραγόμενη ανά περίοδο ποσότητα.

Δεδομένου ότι με τις παραδοχές αυτές δεν θα υπάρξει παραγωγή παρά μόνο αν το απόθεμα είναι μηδενικό, εξετάζουμε μόνο περιόδους όπου δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα. Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να εξετάζουμε συναρτήσεις $f_t(s)$ αλλά «απλούστερες» ελπίζουμε δομές. Ορίζουμε με f_t ως το ελάχιστο κόστος ικανοποίησης της ζήτησης για την περίοδο t έως και το τέλος του ορίζοντα T, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει απόθεμα στην έναρξη της περιόδου t. Τώρα, εφόσον και η επόμενη παραγγελία θα γίνει με μηδενικό απόθεμα, θα πρέπει η παραγωγή την τρέχουσα περίοδο t να καλύπτει ακριβώς την ζήτηση των περιόδων αυτών, δηλαδή την ζήτηση για περιόδους $t,t+1,..,t+\tau$ που ισούται με $d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau}$. Το κόστος παραγωγής είναι $K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})$ – παρατηρούμε ότι το άθροισμα των όρων $\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})$ είναι ανεξάρτητο του προγράμματος παραγωγής και ίσος με $\pi(d_1+d_2+..+d_T)$, οπότε μπορούν να παραλειφθούν – κάτι που δεν θα κάνουμε εδώ για λόγους παρουσίασης. Το δυσκολότερο όμως είναι να υπολογίσουμε το κόστος της αποθήκευσης της ενδεχόμενης πρόσθετης παραγωγής. Από την παραγωγή $d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau}$ η ποσότητα d_t καταναλώνεται αμέσως και δεν αποθεματοποιείται. Η ποσότητα $d_{t+1}+..+d_{t+\tau}$ διατηρείται στην αποθήκη για την επόμενη περίοδο, η ποσότητα $d_{t+2}+..+d_{t+\tau}$ και για την μεθεπόμενη και ούτω καθ' εξής. Άρα η ποσότητα d_{t+1} παραμένει στην αποθήκη για μία επιπλέον περίοδο, η d_{t+2} για δύο περιόδους και γενικά η d_{t+k} για k περιόδους. Έτσι το συνολικό κόστος αποθήκευσης για τις περιόδους $t,t+1,..,t+\tau$ είναι $h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})$.

Αν τώρα αποφασίσουμε να καλύψουμε την ζήτηση από το t έως το $t+\tau$ και εφεξής καλύψουμε την ζήτηση με τον καλύτερο τρόπο, το συνολικό κόστος είναι

$$K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1}$$

Το κόστος αυτό είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από το ελάχιστο κόστος, που είναι εξ' ορισμού f_t, δηλαδή

$$f_t \le K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1}$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε τ, είναι

$$f_t \le \min_\tau \left[K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1}\right]$$

Όμως το βέλτιστο προκύπτει για κάλυψη της ζήτησης μέχρι κάποια περίοδο $t+\tau^*$, και μετά την περίοδο αυτή η κάλυψη της ζήτησης γίνεται με βέλτιστο τρόπο, είναι δηλαδή

$$f_t = \left[K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau^*})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau^*\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau^*+1}\right]$$

που είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο της ποσότητας αυτής ως προς τ. Άρα έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} f_t &\le \min_\tau \left[K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1}\right] \\ &\le \left[K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau^*})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau^*\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau^*+1}\right] = f_t \end{aligned}$$

Τα παραπάνω οδηγούν στην παρακάτω εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού

$$f_t = \min_{\substack{\tau \\ 0\le\tau\le T-t.}} \left[K+\pi(d_t+d_{t+1}+..+d_{t+\tau})+h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1}\right] \qquad (7)$$

Η σχέση δυναμικού προγραμματισμού (7) λύνεται αναδρομικά αρχίζοντας από το T, υπολογίζοντας κατόπιν το f_t για $t=T-1$ με βάση την παραπάνω εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού, κατόπιν για $t=T-2$ και ούτω καθ' εξής. Φυσικά το f_T είναι γνωστό, καθώς αντιστοιχεί με το κόστος κάλυψης της ζήτησης της περιόδου αυτής χωρίς αρχικό απόθεμα, είναι δηλαδή $f_T=K+\pi d_T$, εφόσον βέβαια $d_T>0$.

Η επίλυση της (7) διευκολύνεται από τις παρακάτω παρατηρήσεις

α. Αν $d_t>0$ τότε θα πρέπει να υπάρξει οπωσδήποτε παραγωγή εφόσον θεωρούμε ότι το αρχικό απόθεμα είναι μηδενικό. Αντίθετα αν $d_t=0$ το Κ δεν υπεισέρχεται στην παράσταση.

β. Όπως αναφέρθηκε αρχικά τα κόστη πd_t δεν θα χρειάζεται να ληφθούν υπόψη καθώς το άθροισμά των είναι ανεξάρτητο του τρόπου παραγγελίας. Έτσι η (7) μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής

$$f_t = \begin{cases} K + \min\limits_{\substack{\tau \\ 0\le\tau\le T\text{-}t.}} \left[h(1\cdot d_{t+1}+2\cdot d_{t+2}+..+k\cdot d_{t+k}+..+\tau\cdot d_{t+\tau})+f_{t+\tau+1} \right] & \text{αν } d_t>0 \\ f_{t+1} & \text{αν } d_t=0 \end{cases} \qquad (7')$$

Η παραπάνω θεωρία οφείλεται στους Wagner και Whitin. Μπορεί εύκολα να πειστούμε ότι ισχύει ακόμα και αν τα πάγια K μεταβάλλονται από περίοδο σε περίοδο, είναι δηλαδή γενικά $K=K_t$, το ίδιο δε ισχύει και για τα κόστη αποθήκευσης, να είναι δηλαδή $h=h_t$. Όμως το μεταβλητό κόστος πρέπει να είναι το ίδιο για όλες τις περιόδους.

Γιατί είναι αυτή η εξίσωση (7) “καλύτερη” από πλευράς υπολογισμών από την γενική εξίσωση παραγωγής; Παρατηρήστε ότι η γενική εξίσωση αναζητά συναρτήσεις $f_t(s)$ που πρέπει να υπολογισθούν για κάθε t,s ενώ στην περίπτωση του υποδείγματος Wagner - Whitin η εξάρτηση είναι μόνο από τον χρόνο t και η απόφαση παίρνεται ως προς το τ το οποίο παίρνει μόνο ακέραιες και πεπερασμένες τιμές (για πόσες περιόδους μπροστά θα παραγγείλουμε). Άρα ο υπολογισμός είναι συνολικά συνάρτηση του T^2 που είναι ευνοϊκότερο του $\alpha\beta T$ που είχαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Αυτό φαίνεται και από τους υπολογισμούς που θα δοθούν για το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 (Αναλυτικό)

Λύνουμε εδώ το ίδιο παράδειγμα με αυτό στο Κεφάλαιο 10 του συγγράμματος των Hillier – Lieberman. Έστω λοιπόν ζήτηση για 4 περιόδους, και συγκεκριμένα $d_1=3, d_2=2, d_3=3, d_4=2$. Το πάγιο κόστος είναι $K=2$ και το μεταβλητό $\pi=1$, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι $h=0,2$. Ζητείται να υπολογισθεί το πρόγραμμα παραγωγής ελαχίστου κόστους με την μέθοδο Wagner Whitin. Έστω f_k το ελάχιστο κόστος παραγωγής της ζήτησης κατά τις περιόδους $d_k,d_{k+1},..,d_T$ όπου εδώ $T=4$, δεδομένου ότι δεν υπάρχει απόθεμα κατά την έναρξη της περιόδου k.

Για λόγους παρουσίασης θέτουμε $f_5=0$. Προφανώς είναι $f_4=K+2\pi=2+1\cdot 2=4$. Το ενδιαφέρον αρχίζει από την περίοδο 3. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού μας δίνει

$$f_3 = min\Big(\underset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\mu\acute{o}\nu o\gamma\iota\alpha\tau\eta\nu 3\eta\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o}{2+1\cdot 3+f_4} \quad \underset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\gamma\iota\alpha\pi\varepsilon\rho\iota\acute{o}\delta o\upsilon\varsigma 3\kappa\alpha\iota 4}{2+1\cdot 5+0{,}2\cdot 2+f_5}\Big)$$

$$= min(9;7{,}4) = 7{,}4$$

Αντίστοιχα, έχουμε για το f_2

$$f_2 = min\Big(\underset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\tau\rho\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\sigma\alpha\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o}{2+1\cdot 2+f_3} \quad \underset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\gamma\iota\alpha\pi\varepsilon\rho\iota\acute{o}\delta o\upsilon\varsigma 2{,}3}{2+1\cdot 5+0{,}2\cdot 3+f_4} \quad \underset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\gamma\iota\alpha\pi\varepsilon\rho\iota\acute{o}\delta o\upsilon\varsigma 2-4}{2+1\cdot 7+0{,}2\cdot(3+2\cdot 2)+f_5}\Big)$$

$$= min(11{,}4; 11{,}6; 10{,}4) = 10{,}4$$

Τέλος για την 1η περίοδο έχουμε

$$f_1 = \min_{\tau=0,1,2,3}\Big(\underset{\tau=0}{2+1\cdot 3+f_2} \quad \underset{\tau=1}{7+0{,}2\cdot 2+f_3} \; \underset{\tau=2}{2+\cdot+0{,}2\cdot 8+f_4} \quad \underset{\tau=3}{12+0{,}2\cdot 13+f_5}\Big)$$
$$= min(15{,}4; 14{,}8; 15{,}6; 14{,}8) = 14{,}8$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο βέλτιστες στρατηγικές:

- Παραγωγή όλων των μονάδων στην αρχή με κόστος 12. Το κόστος αποθήκευσης είναι 0,2*[2+2×3+3×2]=2,8, με συνολικό κόστος 14,8.

- Παραγωγή στην περίοδο 1 και στην περίοδο 3 (χρεωνόμαστε 2 πάγια κόστη παραγωγής). Το κόστος είναι [7+0,2×2]+[7+0,2×2]=14,8.□

Παράδειγμα 2 - Συνοπτικό

Έστω το πρόβλημα παραγωγής 5 περιόδων με ζητήσεις ίσες με $d_1=3$, $d_2=5$, $d_3=3$, $d_4=7$, $d_5=3$. Οι παράμετροι παραγωγής είναι $K=2$, $\pi=3$ και το κόστος αποθήκευσης είναι $h=0,3$. Ποιος είναι ο προγραμματισμός παραγωγής που επιτυγχάνει το ελάχιστο συνολικό κόστος; Θα άλλαζε αν μεταβάλαμε το μεταβλητό κόστος π; Πώς θα άλλαζε το πρόγραμμα αν α. αυξάναμε το πάγιο β. αν μεταβάλαμε το κόστος αποθήκευσης;
Οι υπολογισμοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / **Αριθμός περιόδων**	1	2	3	4	5
1	70,8	60,9	37,9	28,0	11,0
2	72,0	59,8	38,5	26,9	
3	71,8	61,9	38,3		
4	75,4	62,6			
5	77,0				
ΖΗΤΗΣΗ	3	7	3	5	3
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	70,8	59,8	37,9	26,9	11,0

Οι στήλες του πίνακα αναφέρονται σε κάθε περίοδο, αρχίζοντας από την πρώτη και καταλήγοντας στην τελική $5^{η}$ περίοδο. Οι γραμμές αναφέρονται στον αριθμό των περιόδων των οποίων η ζήτηση θα καλυφθεί. Τα κελιά δίνουν το συνολικό αντίστοιχο κόστος. Έτσι στην $1^{η}$ γραμμή της $5^{ης}$ στήλης, το κόστος αντιστοιχεί στην παραγωγή 3 μονάδων, που ισούται με 2+3*3=11.

Το στοιχείο της $1^{ης}$ γραμμής στην $4^{η}$ στήλη αντιστοιχεί στο κόστος παραγωγής 7 μονάδων (2+3*5=17) συν το κόστος της επόμενης περιόδου, 11, δηλαδή 28. Το στοιχείο της $2^{ης}$ γραμμής αντιστοιχεί σε παραγωγή 2 περιόδων, δηλαδή 5+3=8 μονάδων με κόστος 2+3*8=26 συν αποθήκευση ποσότητας 3 για μία περίοδο, δηλαδή 0,3*3=0,9, συνολικά 26,9. Η παραγωγή αυτή καλύπτει πλήρως την ζήτηση μέχρι το τέλος του ορίζοντα. Έτσι το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής έχει κόστος το ελάχιστο των δύο στοιχείων, 26,9, και εμφανίζεται στην τελευταία γραμμή. Το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής εντοπίζεται από τον αριθμό γραμμής για την οποία επιτυγχάνεται το βέλτιστο.

Στην $3^{η}$ στήλη, το στοιχείο της $3^{ης}$ γραμμής αντιστοιχεί σε παραγωγή 3 περιόδων, με κόστος 2+3*11=35 και κόστος αποθήκευσης 0,3*(5+2*3)=3,3, δηλαδή 38,3. Δεν υπάρχει άλλο κόστος, καθώς με την παραγωγή αυτή καλύπτεται όλος ο ορίζοντας παραγωγής. Το στοιχείο της $2^{ης}$ γραμμής έχει ενδιαφέρον: η παραγωγή γίνεται για 2 περιόδους ($3^{η}$ και $4^{η}$), έχει δηλαδή ύψος 8 και κόστος 2+3*8=26 καθώς και κόστος αποθήκευσης 0,3*5=1,5. Έχει όμως επιπλέον το κόστος της εξυπηρέτησης της ζήτησης την τελευταία $5^{η}$ περίοδο, που είναι ίσο με 11, σύμφωνα με την τελευταία γραμμή, $5^{η}$ στήλη. Άρα το συνολικό κόστος είναι 26+1,5+11=38,5. Το στοιχείο της $1^{ης}$ γραμμής αντιστοιχεί σε παραγωγή μόνο για την $3^{η}$ περίοδο, 3 μονάδες με κόστος 2+3*3=11, και μηδενικό κόστος αποθήκευσης. Όμως έχει επιπλέον το κόστος της εξυπηρέτησης της ζήτησης από την επόμενη περίοδο μέχρι το τέλος το ορίζοντα, που ισούται με 26,9 σύμφωνα με την τελευταία γραμμή, 4η στήλη, και άρα ισούται με 11+26,9=37,9, που είναι και το ελάχιστο της 3ης στήλης.

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται η 1η και 2η στήλη. Το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής είναι – όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα – τα εξής: Την 1η περίοδο καλύπτεται μόνο η τρέχουσα ζήτηση, με κόστος 2+3*3=11. Την 2η περίοδο καλύπτονται 2 περίοδοι με κόστος 2+3*(5+3)=26 και κόστος αποθήκευσης 0,3*3. Κατά την 3η περίοδο ΔΕΝ υπάρχει παραγωγή. Την 4η περίοδο καλύπτονται δύο περίοδοι με κόστος παραγωγής 2+3*(10)=32 και κόστος αποθήκευσης 0,3*3=0,9. Την 5η περίοδο ΔΕΝ υπάρχει παραγωγή. Το συνολικό κόστος είναι 11+26,9+32,9=70,8, που συμφωνεί με το ελάχιστο κόστος του πίνακα.

Επιβεβαιώστε ότι ο προγραμματισμός παραγωγής δεν θα άλλαζε αν άλλαζε το μεταβλητό κόστος, αλλά οι τιμές του κόστους θα άλλαζαν κατά σταθερές. Αν αυξανόταν το πάγιο από K=2 περιμένουμε ότι θα υπάρχει τάση μεγαλύτερης παραγωγής για να μειωθεί ο αριθμός των «παγίων». Για πάγια 2-7 μονάδων, δεν υπάρχει μεταβολή. Όμως για πάγιο K ίσο με 8 μονάδες, ο αντίστοιχος πίνακας – με μηδενικό μεταβλητό κόστος π=0, θα ήταν ως εξής

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / **Αριθμός**	1	2	3	4	5
1	22,6	19,3	16,9	16,0	8,0
2	21,4	17,8	17,5	8,9	
3	20,8	19,9	11,3		
4	24,4	14,6			
5	20,0				
ΖΗΤΗΣΗ	3	7	3	5	3
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	20,0	14,6	11,3	8,9	8,0

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής αντιστοιχεί με παραγωγή όλων των μονάδων την αρχική περίοδο, με κόστος απλώς 8, συν τα κόστη αποθήκευσης που είναι 0,3*(7+2*3+3*5+4*3)=12, επιβεβαιώνοντας έτσι τον πίνακα. Αν όμως την 1η περίοδο παραγόταν απλά η ζήτηση της περιόδου και στην συνέχεια όλη η υπόλοιπη, το συνολικό κόστος θα ήταν 8+14,6=22,6 που θα ήταν σαφώς χειρότερο. Αν τώρα μεταβαλλόταν το κόστος αποθήκευσης, μείωσή του θα οδηγούσε σε μεγαλύτερες «παρτίδες» παραγωγής και αντίστροφα. Έτσι αν το κόστος αποθήκευσης μηδενιζόταν όλη η παραγωγή θα γινόταν την αρχική περίοδο. Όμως αύξηση του κόστους αποθήκευσης σε *h=0,7* θα οδηγούσε σε παραγωγή που απλώς θα κάλυπτε την ζήτηση κάθε περιόδου, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα *(K=2, h=0,7)*:

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / Αριθμός περιόδων παραγωγής	1	2	3	4	5
1	10,0	8,0	6,0	4,0	2,0
2	12,9	8,1	7,5	4,1	
3	15,1	13,1	9,7		
4	23,6	17,4			
5	30,0				
ΖΗΤΗΣΗ	3	7	3	5	3
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	10,0	8,0	6,0	4,0	2,0

Η περιγραφή του υποδείγματος Wagner - Whitin υπάρχει και στο σύγγραμμα των Hillier Lieberman, Κεφάλαιο 10.

Παράδειγμα 3 – περιορισμός αποθήκευσης

Σε περίπτωση που υπάρχει περιορισμός στην αποθήκευση, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού παραμένει η ίδια, εκτός του ότι το τ δεν πρέπει να οδηγεί σε αποθήκευση υπερβολικών ποσοτήτων. Θα πρέπει δηλαδή $d_{t+1}+..+d_{t+\tau}\leq \beta$ όπου β ο (μέγιστος) αποθηκευτικός χώρος, επιπλέον των άλλων περιορισμών για το τ.

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο αποθηκευτικός χώρος είναι 30 μονάδες. Οι παράμετροι κόστους είναι το πάγιο Κ ίσο με 10 μονάδες και κόστος αποθήκευσης 0,2. Ο υπολογισμός της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού δίνεται στον επόμενο πίνακα:

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / Αριθμός περιόδων παραγωγής	1	2	3	4	5
1	35,6	26,2	21,6	20,0	10,0
2	27,2	25,6	23,0	11,6	
3	30,6	Μη επιτρεπτό	16,2		
4	Μη επιτρεπτό	Μη επιτρεπτό			
5	Μη επιτρεπτό				
ΖΗΤΗΣΗ	9	5	20	15	8
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	27,2	25,6	16,2	11,6	10,0

Το στοιχείο της στήλης 2, 3^{η} γραμμή δεν είναι επιτρεπτό καθώς συνεπάγεται αποθήκευση 35 μονάδων, αντίστοιχα για τα υπόλοιπα στοιχεία. Αν τώρα ο αποθηκευτικός χώρος μειωθεί στις 20 μονάδες, η αντίστοιχη επίλυση περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / **Αριθμός περιόδων παραγωγής**	1	2	3	4	5
1	35,6	31,6	21,6	20,0	10,0
2	32,6	25,6	23,0	11,6	
3	Μη επιτρεπτό	Μη επιτρεπτό	Μη επιτρεπτό		
4	Μη επιτρεπτό	Μη επιτρεπτό			
5	Μη επιτρεπτό				
ΖΗΤΗΣΗ	9	5	20	15	8
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	32,6	25,6	21,6	11,6	10,0

Το κόστος στην περίπτωση αυτή είναι μεγαλύτερο από ό, τι προηγουμένως, όπως είναι φυσικό. Σε περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί αποθηκευτικού χώρου, η ανάλυση δίνεται στον παρακάτω πίνακα

ΠΕΡΙΟΔΟΣ / **Αριθμός περιόδων παραγωγής**	1	2	3	4	5
1	34,8	26,2	21,6	20,0	10,0
2	27,2	25,6	23,0	11,6	
3	30,6	30,0	16,2		
4	38,0	24,8			
5	34,4				
ΖΗΤΗΣΗ	9	5	20	15	8
ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ f_t	27,2	24,8	16,2	11,6	10,0

Συγκρίνοντας τον πίνακα αυτό με τον αρχικό, παρατηρούμε ότι ναι μεν υπάρχουν διαφορές, αλλά το τελικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο καθώς η βέλτιστη παραγωγή για ορίζοντα 5 περιόδων δεν απαιτεί αποθηκευτικό χώρο μεγαλύτερο των 30 μονάδων. Όμως αν ο ορίζοντας ήταν μόνο 4 περιόδων, (με έναρξη την $2^η$ περίοδο) η βέλτιστη παραγωγή θα κάλυπτε 3 περιόδους – δηλαδή μέχρι το τέλος το ορίζοντα – με συνολική παραγωγή 35 μονάδων, κάτι που δεν είναι επιτρεπτό. Για ορίζοντα 5 περιόδων η αποθήκευση που απαιτείται όμως είναι 5 την πρώτη περίοδο, 0 την $2^η$, 23 την $3^η$, και 8 την $4^η$, που είναι επιτρεπτό με αποθηκευτικό χώρο 30 μονάδων.

4.9 Πώληση αντικειμένου

Έστω ότι κατέχουμε ένα αντικείμενο μεγάλης αξίας που θέλουμε να πωλήσουμε. Κάθε χρονική περίοδο δεχόμαστε προσφορές τις οποίες αποδεχόμαστε ή όχι. Αν δεν αποδεχθούμε προχωρούμε στην επόμενη περίοδο όπου πάλι μας υποβάλλονται προσφορές. Θεωρούμε ότι οι προσφορές που υποβάλλονται είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Χ που είναι ανεξάρτητες μεταξύ των και ίδιας κατανομής. Αν αποδεχθούμε κάποια προσφορά εισπράττουμε το ποσό και η διαδικασία τελειώνει. Χρεωνόμαστε όμως ένα κόστος αναμονής που είναι ανάλογο με τον χρόνο μέχρι την πώληση του αντικειμένου. Ισοδύναμα, για κάθε περίοδο που δεν αποδεχόμαστε καμία προσφορά χρεωνόμαστε ένα ποσό έστω c. Ποια είναι η τακτική που θα μας επιτρέψει να επιτύχουμε τη μέγιστη καθαρή τιμή πωλήσεως (τιμή που επιτεύχθηκε μείον το κόστος αναμονής). Εφόσον το αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας είναι πιθανολογικό, θεωρούμε εύλογο να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη καθαρή τιμή πωλήσεως.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θεωρούμε ότι έχουμε παρατηρήσει την καλύτερη προσφορά της τρέχουσας περιόδου έστω x. Συμβολίζουμε με $V(x)$ την μέγιστη αναμενόμενη καθαρή τιμή. Αν τώρα αποδεχθούμε την τρέχουσα προσφορά, το όφελος είναι ακριβώς x καθώς δεν υπάρχει κόστος αναμονής. Αν όμως δεν αποδεχθούμε την προσφορά, προχωρούμε στην επόμενη περίοδο έχοντας υποστεί κόστος c. Αν τώρα από την επόμενη περίοδο και εφεξής ακολουθηθεί η βέλτιστη στρατηγική, το όφελος θα είναι $V(y)$ όπου y η αβέβαιη προσφορά της επόμενης περιόδου. Άρα το αναμενόμενο όφελος θα είναι $E(V(X))$, δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $V(X)$ – παρατηρείστε ότι η προσφορά την επόμενη περίοδο y είναι και αυτή πραγματοποίηση της αρχικής τυχαίας μεταβλητής X, και το καθαρό αναμενόμενο όφελος $E(V(X))\text{-}c$.

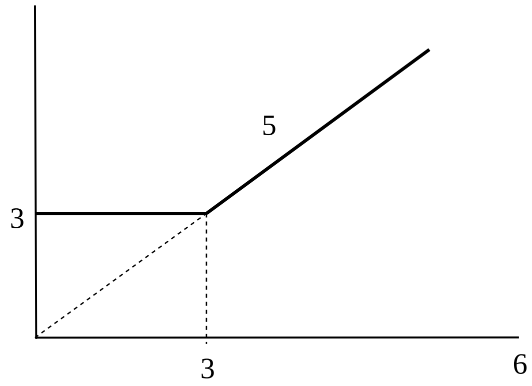
> Παρατηρείστε ότι αν υπήρχε εξάρτηση των διαδοχικών προσφορών, η παρατήρηση της τρέχουσας προσφοράς x θα επηρέαζε την αναμενόμενη τιμή της επομένης περιόδου, θα περιμέναμε δηλαδή ένα αναμενόμενο όφελος $E(V(X)/x)$, θα είχαμε δηλαδή μία υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή. Εδώ όμως δεν γεννάται τέτοιο ζήτημα λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών Χ.

Με επιχειρήματα όπως τα προηγούμενα προκύπτει ότι η συνάρτηση V θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση δυναμικού προγραμματισμού

$$V(x) = max[x;E(V(X))\text{-}c] \tag{8}$$

> Η σχέση ισχύει εφόσον είναι εξ' ορισμού $V(x)\geq E(V(X))\text{-}c$ αλλά και $V(x)\geq x$ και άρα $V(x)\geq max[x;E(V(X))\text{-}c]$. Εφόσον όμως είναι είτε $V(x)=E(V(X))\text{-}c$ είτε $V(x)=x$ θα πρέπει $V(x)\leq max[x;E(V(X))\text{-}c]$ και άρα ισχύει η ισότητα.

Η επίλυση της παραπάνω σχέσης δεν είναι εύκολη, καθώς δεν υπάρχει προφανής αναδρομικότητα. Μία έμμεση λύση προκύπτει ως εξής: Ο δεύτερος όρος στον τελεστή max στην εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι σταθερός – δεν εξαρτάται δηλαδή από την τρέχουσα προσφορά x. Άρα η $V(x)$ είναι μία συνάρτηση που είναι σταθερά για τιμές του x μικρότερες από αυτή την σταθερά, και ίση με x για μεγαλύτερες τιμές. Έστω β η τιμή της σταθεράς αυτής. Τότε η $V(x)$ έχει γραφική παράσταση όπως στο παρακάτω σχήμα.



Πώς υπολογίζουμε την κρίσιμη τιμή της παραμέτρου β; Για τιμές του x κάτω από β θα πρέπει $V(x)=\beta=E(V(X))-c$. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή $E(V(X))$ σαν συνάρτηση του β ως εξής – βλέπε και το παραπάνω σχήμα:

$$E\big(V(X)\big) = \int_{-\infty}^{\beta} \beta f(x)dx + \int_{\beta}^{\infty} xf(x)dx$$

Στον τύπο αυτό $f(x)$ είναι η πυκνότητα της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X. Το πρώτο ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στην περίπτωση που η προσφορά είναι κάτω του β, και το δεύτερο σε περίπτωση που είναι πάνω από β. Έτσι η σχέση που πρέπει να ισχύει για την κρίσιμη τιμή του β είναι

$$\beta = \int_{-\infty}^{\beta} \beta f(x)dx + \int_{\beta}^{\infty} xf(x)dx - c$$

Η σχέση αυτή είναι μία εξίσωση ως προς β και λύνεται συνήθως με αριθμητικές μεθόδους. Η βέλτιστη λοιπόν τακτική για την πώληση είναι πολύ εύλογη: Δεν αποδεχόμαστε προσφορές που είναι μικρότερες του β, και συνεχίζουμε έως ότου μας γίνει μία τέτοια προσφορά!

Παράδειγμα

Έστω ότι οι προσφορές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μεταξύ A και B, $A<B$. Προφανώς θα πρέπει $A<\beta<B$, οπότε το β πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$\beta = \frac{\beta}{B-A}\int_{A}^{\beta} dx + \frac{1}{B-A}\int_{\beta}^{B} xdx - c$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\beta=B-(2c(B-A))^{1/2}$. Έτσι για $B=10$, $A=2$, $c=2$ το σημείο αποδοχής προσφορών είναι $\beta=10-(2\cdot 2\cdot 8)^{1/2}=10-4\cdot 1{,}41=4{,}34$. Αν το κόστος ήταν μικρότερο, π. χ. $c=1$, θα είχαμε μεγαλύτερες απαιτήσεις προτού αποδεχθούμε μια προσφορά, καθώς η ελάχιστη αποδεκτή προσφορά είναι $\beta=10-(1\cdot 2\cdot 8)^{1/2}=6$.

4.10 Ασκήσεις

1. Λύστε το πρόβλημα παραγωγής στο Παράδειγμα 1, Υπόδειγμα Wagner Whitin με τις εξής αλλαγές
    a. Κόστος αποθήκευσης 0,3 Πάγιο K=5 Ζήτηση $d_1=4$, $d_2=3$,$d_3=2$,$d_4=3$, $d_5=2$
    b. $K=2$, $\pi=0{,}5$, $h=0{,}8$, ίδια ζήτηση
2. Στο πρόβλημα της Πώλησης Αντικειμένου, υπολογίστε την ελάχιστη αποδεκτή προσφορά αν οι προσφορές έχουν αρνητική εκθετική κατανομή με παράμετρο λ - δηλαδή $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ για x θετικό, μηδέν διαφορετικά.

4.11 Βιβλιογραφία

Το κλασσικό σύγγραμμα για τα θέματα αυτά είναι το

Richard Bellman, Dynamic Programming,

Σε αυτό πέραν της θεωρίας που είναι σε πολύ προχωρημένο επίπεδο, περιέχεται μία πολύ καλή σειρά εφαρμογών.

Όλα τα διδακτικά βιβλία σε Αλγορίθμους, Επιχειρησιακή Έρευνα, Βελτιστοποίηση κ. λπ. αναφέρονται εκτεταμένα στον Δυναμικό Προγραμματισμό. Ένα πολύ καλό προχωρημένο σύγγραμμα είναι το

K. Steiglitz C. Papadimitriou, *Combinatorial Optimization*, Dover Publications

Στους Αλγορίθμους, κεφάλαια για Δυναμικό Προγραμματισμό υπάρχουν στα συγγράμματα

Cormen, Leicester, Rivest *Algorithms*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης

R. Sedgewick, *Αλγόριθμοι σε (οποιαδήποτε γλώσσα..)*, Κλειδάριθμος

Στα συγγράμματα Επιχειρησιακής Έρευνας, βλέπε

Hillier-Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 6th edition

Κεφάλαιο 9: Dynamic Programming

Κεφάλαιο 10: Inventory Theory

Π. Μηλιώτη, *Επιχειρησιακή Έρευνα*, Εκδ. Σταμούλη

Κεφάλαιο 3

Το άρθρο των Wagner Whitin είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο

http://www.jstor.org/stable/2626974?seq=1&Search=yes&searchText=wagner&searchText=whitin&list=hide&searchUri=%2Faction%2FdoBasicSearch%3Ffilter%3D%26Query%3Dwagner%2Bwhitin%26Search.x%3D7%26Search.y%3D14%26wc%3Don&prevSearch=&item=9&ttl=457&returnArticleService=showFullText&resultsServiceName=null

Σε αυτό αναφέρεται και μία μορφή εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού που επιτρέπει ακόμα μεγαλύτερη οικονομία στους υπολογισμούς.