**Παραδείγματα Κατάστρωσης Δυναμικών Υποδειγμάτων**

## 1. Αριθμοί Fibonacci

Έστω ότι την χρονική στιγμή 0 αφήνουμε σε ένα έρημο νησί ένα ζευγάρι λαγών. Τα ζευγάρια των λαγών ζουν επ' άπειρο. Όταν συμπληρώσουν ένα μήνα ζωής γεννούν ένα νέο ζεύγος λαγών ανά μήνα. Παρατηρούμε τον νησί ανά μήνα και θέλουμε να προβλέψουμε τον αριθμό των ζευγών μετά n μήνες.

Ένα υπόδειγμα καταστρώνεται εύκολα αν συμβολίσουμε με $x_n$ τα νεογέννητα ζεύγη και με $y_n$ τα ηλικίας ενός ή περισσοτέρων μηνών τον μήνα n. Τον επόμενο μήνα n+1 θα υπάρχουν $y_n$ νεογέννητα ζεύγη, θα είναι δηλαδή $x_{n+1}=y_n$. Επίσης θα υπάρχουν $y_n+x_n$ ζεύγη ηλικίας ενός μηνός και άνω, θα είναι δηλαδή $y_{n+1}= y_n+x_n$.

Ο συνολικός αριθμός ζευγών την περίοδο n, έστω $w_n$, ισούται με $y_n+x_n$. Έτσι έχουμε τις σχέσεις

$$w_n = y_n+x_n \tag{1α}$$
$$x_{n+1}=y_n \tag{1β}$$
$$y_{n+1}= y_n+x_n \ (= w_n) \tag{1γ}$$

Αθροίζοντας τις (1β) και (1γ) προκύπτει

$$w_{n+1} = y_{n+1}+x_{n+1}= y_n+x_n + y_n = w_n+ y_n \tag{2}$$

Αλλά η (1γ) γράφεται ως $y_n= y_{n-1}+x_{n-1} = w_{n-1}$ οπότε τελικά η (2) γράφεται

$$w_{n+1} = w_n+ w_{n-1} \tag{3}$$

Η (3) είναι η εξίσωση αριθμών Fibonacci.

Σε περίπτωση που οι ώριμοι λαγοί γεννουν 2 νέα ζεύγη οι σχεσεις παραμένουν σχεδόν οι ίδιες, αλλά είναι $x_{n+1}=2y_n$. Τότε $w_{n+1} = y_{n+1}+x_{n+1}= y_n+x_n + 2y_n = w_n+ 2w_{n-1}$

## 2. Υπόδειγμα με επιπλέον αφίξεις

Έστω ότι κάθε μήνα αφήνουμε από ένα νεογέννητο ζεύγος λαγών στο νησί. Τότε οι σχέσεις γίνονται

$$x_{n+1}=y_n+1$$
$$y_{n+1}= y_n+x_n = w_n$$

που οδηγούν με την ίδια μέθοδο στην εξίσωση διαφορών

$$w_{n+1} = w_n+ w_{n-1}+1 \tag{4}$$

## 3. Πεπερασμένη επιβίωση

Έστω τώρα ότι τα ζεύγη αποθνήσκουν μετά ηλικία 2 μηνών – αφού γεννήσουν για δεύτερη φορά. Για να καταστρώσουμε τις εξισώσεις συμβολίζουμε με $x_n$ τα νεογέννητα ζεύγη, με $y_n$ τα ηλικίας ενός μηνός και με $z_n$ τα ηλικίας 2 μηνών τον μήνα n. Οι σχετικές δυναμικές εξισώσεις είναι

$$x_{n+1}=y_n+ z_n \tag{5α}$$
$$y_{n+1}= x_n \tag{5β}$$
$$z_{n+1}= y_n \tag{5γ}$$
$$w_n = x_n+ y_n+ z_n \tag{5δ}$$

Αθροίζοντας τις (5α,β,γ) προκύπτει

$$w_{n+1} = w_n+ y_n \ \text{ ή } \ y_n = w_{n+1}-w_n \tag{5ε}$$

οπότε έχουμε από την (5γ) και την προηγούμενη

$$z_n= y_{n-1} = w_n-w_{n-1} \tag{6α}$$

και από την (5β) και την προηγούμενη

$$x_n= y_{n+1}= w_{n+2}-w_{n+1} \tag{6β}$$

Αθροίζοντας τελικά τις (5ε),(6α),(6β) έχουμε τελικά

$$w_n = x_n + y_n + z_n = w_{n+2} - w_{n+1} + w_{n+1} - w_n + w_n - w_{n-1}$$

που απλοποιείται σε

$$w_{n+2} = w_n + w_{n-1}$$

Αν αφήσουμε την στιγμή 0 ένα ζεύγος λαγών, θα είναι $w_0=1$. Μετά ένα μήνα θα είναι πάλι $w_1=1$ αλλά μετά άλλο ένα μήνα θα είναι $w_2=2$, καθώς θα υπάρξει ένα ζεύγος νεογέννητων. Μετά άλλο ένα μήνα, το αρχικό ζεύγος γεννά και αποθνήσκει, οπότε ο συνολικός πληθυσμός παραμένει στο 2. Επιβεβαιώστε τους παρακάτω αριθμούς του πληθυσμού:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | ; |

## 4. Συστήματα εξισώσεων διαφορών

Αν κοιτάξουμε τις σχέσεις (1β), (1γ) τις οποιες επαναλαμβάνουμε παρακάτω

$$x_{n+1}=y_n \qquad (1β)$$

$$y_{n+1}= y_n+x_n \ (= w_n) \qquad (1γ)$$

διαπιστώνουμε ότι η γνώση των αρχικών xn,yn επαρκεί για να προσδιορίσουμε τα x,y για όλα τα υπόλοιπα n. Σε όρους γραμμικής άλγεβρας έχουμε $X_{n+1}=AX_n$ όπου Xn είναι το διάνυσμα $(x_n,y_n)$ και A ο 2×2 πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε είναι $X_n=A^nX_0$, οπότε η λύση της εξίσωσης διαφορών ανάγεται στον υπολογισμό της δύναμης ενός πίνακα. Με τεχνικές γραμμικής άλγεβρας προκύπτει ότι

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} \rho_2 & -1 \\ -\rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

με $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618..$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618..$ .

Οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ έχουν σχέση με τους αριθμούς Fibonacci και την λύση της εξίσωσης διαφορών (3). Με παρόμοιες μεθόδους λύνονται πιο περίπλοκες εξισώσεις διαφορών.

## 5. Άσκήσεις

Α. Λύστε τις εξισώσεις διαφορών που αναφέρθηκαν παραπάνω
Β. Τι θα συμβεί αν την χρονική στιγμή n αφήνουμε n νέα ζεύγη νεογέννητων λαγών;
Γ. Ίδια ερώτηση με το Β. αλλά με διάρκεια ζωής 2 μήνες
Δ. Λύστε το αρχικό υπόδειγμα με διάρκεια ζωής 3 μήνες. Μπορείτε να γενικεύσετε για διάρκεια ζωής κ μήνες;
Ε. Γράψτε τις εξισώσεις όταν κάθε ώριμο ζεύγος γεννά κ ζεύγη, και η διάρκεια ζωής είναι m.