Διάλεξη 3

Διαμόρφωση γραμμικών και ακεραίων-γραμμικών προβλημάτων,
Τρίτη 27/2/18

Περιεχόμενα

Παράδειγμα 1: Πρόβλημα παραγωγής

Ένας αγρότης στην αρχή κάθε έτους αποφασίζει για τις καλλιέργειες που θα παράξει με σκοπό τη μεγιστοποίηση των κερδών του από την πώληση της παραγωγής.
Θεωρήστε ότι μπορεί να παράξει x_1 κιλά ντομάτας, x_2 κιλά αγγούρι και x_3 κιλά πιπεριές. Για την παραγωγή έχει στη διάθεσή του 500 τετραγωνικά μέτρα καλλιεργήσιμου εδάφους, 10 τόνους νερού και 800 κιλά λίπασμα. Κάθε κιλό ντομάτας καταλαμβάνει επιφάνεια εδάφους 1 τ.μ. και χρειάζεται 10 λίτρα νερού. Τα αγγούρια απαιτούν αντίστοιχα 0.75 τ.μ. και 20 λίτρα νερού και οι πιπεριές 1.5 τ.μ. και 20 λίτρα. Κάθε κιλό καλλιέργειας χρειάζεται 1 κιλό λίπασμα.
Εάν η αγορά των οπωροκηπευτικών είναι ανταγωνιστική και οι τιμές ανα κιλό ντομάτας, αγγουριού και πιπεριάς είναι 1.5, 1 και 2 ευρώ αντίστοιχα, βρείτε την παραγωγή που επιφέρει το μέγιστο δυνατό κέρδος. (Εδώ αγνοούμε άλλους παράγοντες κόστους, πχ ενοίκια, εργασία, καύσιμα, αγορά σπόρων.)

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

$$\max 1.5x_1 + x_2 + 2x_3$$

έτσι ώστε $x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 \leq 500$

$$10x_1 + 20x_2 + 5x_3 \leq 10000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Τέτοια προβλήματα λέγονται **γραμμικά προγράμματα** γιατί τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. (Σημείωση: ένα γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να περιλαμβάνει και ισοτικούς περιορισμούς, φτάνει να είναι γραμμικοί. Επίσης, οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να λαμβάνουν και αρνητικές τιμές.)

Στο παραπάνω πρόβλημα η ποσότητα του νερού και λιπάσματος ήταν προαποφασισμένη και έτσι το κόστος αγοράς τους δε συμμετείχε στην εύρεση του βέλτιστου πλάνου παραγωγής. Έστω τώρα ότι η τιμή αγοράς του λίτρου νερού είναι 1 λεπτό του ευρώ και το λίπασμα έχει κόστος 1 ευρώ το κιλό. Θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε ένα πιο γενικό πρόβλημα με τις επιπλέον μεταβλητές απόφασης y_2, y_3 για το νερό και το λίπασμα αντίστοιχα, που πρέπει να αγοραστεί:

$$\max 1.5x_1 + x_2 + 2x_3 - 0.01y_2 - y_3$$

έτσι ώστε $x_1 + 0.75x_2 + 1.5x_3 \leq 500$

$$10x_1 + 20x_2 + 5x_3 \leq y_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq y_3$$

$$x_1, x_2, x_3, y_2, y_3 \geq 0$$

Πάγια κόστη

Θεωρείστε ότι η παραγωγή ντομάτας απαιτεί πάγιο κόστος (δηλαδή ανεξάρτητο της ποσότητας ντομάτας) 50 ευρώ για γεωπονικές συμβουλές. Ίσως αυτό το επιπλέον κόστος κάνει την παραγωγή ντομάτας μη συμφέρουσα και επιφέρει αλλαγές στο βέλτιστο πλάνο. Μπορούμε να ενσωματώσουμε το κόστος αυτό με την εισαγωγή μιας μεταβλητής f_1 που επιτρέπεται να λαμβάνει μόνο την τιμή 0 ή 1 και του περιορισμού $x_1 \leq Mf_1$, όπου M ένας αρκετά μεγάλος θετικός αριθμός που δεν θα περιόριζε από μόνος του την τιμή της x_1. Για παράδειγμα, $M = 1000$ αρκεί μιας και ο εδαφικός περιορισμός είναι πιο περιοριστικός.

Γραμμικά προβλήματα στα οποία κάποιες μεταβλητές απόφασης (όπως η f_1) περιορίζονται σε διακριτές τιμές, λέγονται **ακέραια γραμμικά προγράμματα**.

Παράδειγμα 2: Ελαχιστοποίηση κόστους

Ένα επίσης αρχετυπικό γραμμικό πρόβλημα είναι αυτό της ελαχιστοποίησης κόστους με ταυτόχρονους περιορισμούς ζήτησης. Ας διατυπώσουμε τη γενική μορφή χρησιμοποιώντας το “πρόβλημα της δίαιτας”: θεωρείστε ότι υπάρχουν m βιταμίνες και απαιτείται κάθε εβδομάδα να λαμβάνεται τουλάχιστον b_i ποσότητα από την i $i = 1, \ldots, m$). Οι βιταμίνες λαμβάνονται μέσω μιας δίαιτας που αποτελείται από n διατροφικά προϊόντα, όπου η μονάδα του j-οστού προϊόντος ($j = 1, \ldots, n$) περιέχει a_{ij} μονάδες της i-οστής βιταμίνης και κοστίζει p_j. Εάν x_j είναι οι μονάδες του προϊόντος j που αγοράζονται, τότε το πρόβλημα είναι το εξής:

$$\min \sum_j p_j x_j$$

έτσι ώστε $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα του σακιδίου (knapsack problem)

Έστω ότι συμμετέχετε στο εξής παιχνίδι: βρίσκεστε σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών και πρέπει να γεμίσετε ένα σάκο χωρητικότητας V κυβικών εκατοστών με προϊόντα όσο τον δυνατό μεγαλύτερης συνολικής αξίας. Θεωρείστε ότι το κατάστημα διαθέτει n προϊόντα, όπου το προϊόν υπ'αριθμό i έχει τιμή a_i, καταλαμβάνει όγκο v_i και αυτά είναι γνωστά σε εσάς.
Ποιά προϊόντα θα διαλέγατε να βάλετε στο σάκο; Το πρόβλημα που πρέπει να λύσετε είναι το εξής ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq V$

$x_i \in \{0, 1\}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$

Σελιδοποίηση μνήμης (memory paging)

Το προβλήματος του σάκου βρίσκει εφαρμογή στη σελιδοποίηση μνήμης που εκτελεί ένα λειτουργικό σύστημα. Θεωρείστε ότι τα αντικείμενα αντιστοιχούν σε εφαρμογές με την μνήμη που καταλαμβάνει η i-οστή εφαρμογή να είναι u_i GB. Εάν η συνολική φυσική μνήμη RAM είναι

V GB, το λειτουργικό σύστημα θα πρέπει να επιλέξει ποιές εφαρμογές θα κρατηθούν στη RAM και ποιές θα μεταφερθούν σε άλλον τύπο μνήμης (πχ SDRAM). Είναι επιθυμητό να κρατηθούν στη RAM εφαρμογές που χρησιμοποιούνται συχνότερα, ώστε η εκτέλεσή τους να μην καθυστερήσει όταν ξαναγίνουν ενεργές από τον χρήστη. Το λειτουργικό σύστημα θα μπορούσε να αντιστοιχήσει σε κάθε εφαρμογή έναν δείκτη χρήσης a_i, όπως για παράδειγμα το πλήθος των γεγονότων ενεργοποίησης της εφαρμογής (mouse over, click κτλ.) από τον χρήστη. Ένας αλγόριθμος σελιδοποίησης θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα του σάκου όπου προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το άθροισμα των δεικτών χρήσης των εφαρμογών που κρατώνται στη RAM.