Διάλεξη 18

Ανάλυση ευαισθησίας ΓΠ, Τρίτη 24/5/16

Θεωρήστε το πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους στη Διάλεξη 3, όπου μετά από απλοποίηση του 2ου περιορισμού (διαίρεση με 5) έχουμε:

$$\max \frac{3}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 \tag{1}$$

Έτσι ώστε

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 500$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ας το λύσουμε με simplex. Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\begin{aligned}
\max \zeta &= \quad + \frac{3}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 \\
z_1 &= 500 - x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\
z_2 &= 2000 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 \\
z_3 &= 800 - x_1 - x_2 - x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Κάνουμε pivot τις μεταβλητές x_1, z_1:

$$\begin{aligned}
\max \zeta &= \frac{2000}{3} + \frac{1}{3}x_1 \qquad - \frac{4}{3}z_1 \\
x_3 &= \frac{1000}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{2}{3}z_1 \\
z_2 &= \frac{5000}{3} - \frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{2}{3}z_1 \\
z_3 &= \frac{1400}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{3}z_1 \\
& x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Τώρα γίνεται pivot στις x_1, x_3:

$$
\begin{aligned}
&\max \zeta = \frac{2750}{3} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_2 - \frac{3}{2}z_1 \\
&x_1 = 500 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_2 - z_1 \\
&z_2 = 1000 + 2x_3 - \frac{3}{2}x_2 + 2z_1 \\
&z_3 = 300 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_2 + z_1 \\
&x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Εδώ τερματίζει ο simplex και η βέλτιστη βασική λύση είναι $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3) = (500, 0, 0, 0, 1000, 300)$. Η παραγωγή που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι η αποκλειστική καλλιέργεια ντομάτας έως ότου εξαντληθεί το καλλιεργήσιμο έδαφος. Παρατηρήστε ότι παραμένουν αχρησιμοποίητα 1000 λίτρα νερού και 300 κιλά λίπασμα.

Εάν ο παραγωγός μπορούσε να διαθέσει λίγα χρήματα παραπάνω για την αγορά επιπλέον ποσοτήτων εδάφους, νερού ή λιπάσματος, τι από αυτά θα αγόραζε ώστε να μεγιστοποιούσε το κέρδος του; Εφόσον παραμένει αχρησιμοποίητα νερό και λίπασμα κατά πάσα πιθανότητα λίγα επιπλέον από αυτά θα ήταν άχρηστα στον παραγωγό: αν τον συνέφερε ήδη θα χρησιμοποιούσε από τις ποσότητες που παραμένουν.

Πόσο θα αυξάνονταν το κέρδος του παραγωγού εάν διέθετε λίγα τετραγωνικά μέτρα παραπάνω, πχ 1 τ.μ.; Ο περιορισμός που αφορά το έδαφος (1ος περιορισμός του (1)) θα γίνονταν $x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 500 + 1$.

Ερωτήματα αυτής της μορφής, δηλαδή πόσο αλλάζει η βέλτιστη τιμή εάν κάναμε μικρές αλλαγές σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, λέγονται **ανάλυση ευαισθησίας**. Ευτυχώς, λόγω των μικρών αλλαγών δε χρειάζεται να λύσουμε ξανά το πρόβλημα! Ισχύει το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 18.1: "ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΥΑΣΘΗΣΙΑΣ ΓΠ"

Έστω ζ_* η βέλτιστη τιμή του ΓΠ: $\max \sum_j c_j x_j$

έτσι ώστε $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m$

όπου $x_j, j = 1, \ldots, n$.

Θεωρήστε το ΓΠ: $\max \sum_j c_j x_j$

έτσι ώστε $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i + \epsilon_i, i = 1, \ldots, m$

όπου $x_j, j = 1, \ldots, n$,

Όπου $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ μικρές ποσότητες.

Η βέλτιστη τιμή του είναι $\zeta_* + \sum_i \lambda_i^* \epsilon_i$

όπου λ_i^* είναι η αντίθετη τιμή του συντελεστή της μεταβλητής χαλαρότητας του i-οστού περιορισμού στην εξίσωση που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση στο τελικό λεξικό του simplex του 1ου προβλήματος.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = 0$. Στο τελικό λεξικό (2) του simplex όπου λύσαμε το ΓΠ (1), οι συντελεστές των μεταβλητών χαλαρότητας z_1, z_2, z_3 στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης (εκείνης που περιέχει τη ζ) είναι -3/2,0,0 αντίστοιχα. Άρα $\lambda_1^* = \frac{3}{2}, \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$. Επίσης η βέλτιστη τιμή του (1) είναι 2750 (πάλι κοιτώντας το τελικό λεξικό).

Συνεπώς το βέλτιστο κέρδος με το 1 επιπλέον τ.μ. είναι $2750 + \frac{3}{2} \times 1 = 2751.5$.