Διάλεξη 11

Μέθοδος Lagrange για βελτιστοποίηση προβλημάτων με περιορισμούς, Τρίτη 5/4/16

Ένα πρόβλημα με περιορισμούς

Θεωρήστε το εξής πρόβλημα: $\min x + 2y$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = 1$ και $x, y \in \mathbb{R}$.

Η εύρεση της βέλτιστης λύσης βασίζεται σε ένα άλλο πρόβλημα βελτιστοποίησης: $\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}} L(x,y)$ όπου η αντικειμενική συνάρτηση $L(x,y) = x + 2y + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x^2 + y^2 - 1\right)$ δίνεται από το άθροισμα της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης με κάποιο πολλαπλάσιο ενός όρου που προέρχεται από τον ισοτικό περιορισμό. Παρακάτω θα δούμε γιατί η $L(x,y)$ έχει αυτή τη μορφή.

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη ελαχιστοποίηση *δεν έχει περιορισμούς*, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο λύσης από τη Διάλεξη 8.

Είναι εύκολο να ελέγξετε ότι $\nabla L\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$ και επίσης ότι η L είναι κυρτή συνάρτηση. Συνεπώς από την ικανή συνθήκη προβλημάτων χωρίς περιορισμούς, η βέλτιστη λύση είναι $x^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y^* = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Παρατηρήστε ότι το σημείο αυτό τυγχάνει να βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο αφού ${x^*}^2 + {y^*}^2 = 1$, παρόλο που δεν επιβλήθηκε τέτοιος περιορισμός στην ελαχιστοποίηση της L. (Ο συντελεστής $\sqrt{5}/2$ στην $L(x,y)$ επιλέχθηκε ακριβώς για να συμβεί αυτή η "σύμπτωση".) Το σημείο $x^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y^* = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ δίνει τη μικρότερη τιμή στη $L(x,y)$ από όλα τα σημεία του επιπέδου, ειδικά δε από τα σημεία x, y με $x^2 + y^2 = 1$. Συνεπώς, το (x^*, y^*) είναι επίσης βέλτιστη λύση για το πρόβλημα $\min\limits_{x^2+y^2=1} L(x,y)$.

Όμως για x, y με $x^2 + y^2 = 1$ ισχύει $L(x,y) = x + 2y$ και άρα $\min\limits_{x^2+y^2=1} L(x,y) = \min\limits_{x^2+y^2=1} x + 2y$, δηλαδή το $x^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y^* = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ είναι βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος με τον ισοτικό περιορισμό.

Ο παραπάνω συλλογισμός επιτρέπει την εύρεση της βέλτιστης λύσης με τη βοήθεια μιας “μαγικής” συνάρτησης $L(x, y)$. Από που προήλθε αυτή η συνάρτηση; Μπορούμε να βρίσκουμε τέτοιες “μαγικές” συναρτήσεις και σε άλλα προβλήματα με περιορισμούς;

Η ιδιότητα που εκμεταλλευτήκαμε παραπάνω ήταν ότι η βέλτιστη λύση της ελαχιστοποίησης της $L(x, y)$ ικανοποιεί τον ισοτικό περιορισμό. Αυτό είναι και το κριτήριο με το οποίο επιλέχθηκε ο συντελεστής $\sqrt{5}/2$.

Η μέθοδος Lagrange

Θεωρήστε το πρόβλημα:

$$\min f(\vec{x})$$

έτσι ώστε $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}$

$$\vec{x} \in A$$

όπου $\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Ορίζουμε τη ***Λαγκραντζιανή συνάρτηση*** του προβλήματος, τη συνάρτηση

$$L(\vec{x}; \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot \left[\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\right] = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[g_i(\vec{x}) - b_i\right]$$

.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Ικανή συνθήκη Lagrange]: Εάν υπάρχει $\vec{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ ***για το οποίο η βέλτιστη λύση*** $\vec{x}^*$ ***του προβλήματος*** $\min_{\vec{x} \in A} L(\vec{x}; \vec{\lambda}^*)$ ***υπάρχει και τυγχάνει να ικανοποιεί τον περιορισμό*** $\vec{g}(\vec{x}^*) = \vec{b}$***, τότε η*** $\vec{x}^*$ ***είναι βέλτιστη λύση για το πρόβλημα*** $\min_{\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \vec{x} \in A} f(\vec{x})$
.

Απόδειξη: Η $\vec{x}^*$ ελαχιστοποιεί τη Λαγκραντζιανή (για $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^*$) από όλα τα $\vec{x} \in A$ και ειδικότερα για αυτά που ικανοποιούν $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}$. Συνεπώς η $\vec{x}^*$ είναι επίσης βέλτιστη λύση του $\min_{\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \vec{x} \in A} L(\vec{x}; \vec{\lambda}^*)$. Όμως $L(\vec{x}; \vec{\lambda}^*) = f(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x}$ που ικανοποιεί $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}$, άρα $\min_{\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \vec{x} \in A} L(\vec{x}; \vec{\lambda}^*) = \min_{\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \vec{x} \in A} f(\vec{x})$. ■

Η στρατηγική λύσης προβλημάτων με τη χρήση του παραπάνω θεωρήματος:

1. Εύρεση συνόλου $\Lambda = \{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \min_{\vec{x} \in A} L(\vec{x}; \vec{\lambda}) > -\infty\}$ των πολλαπλασιαστών Lagrange για τους οποίους το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της Λαγκραντζιανής ως προς $\vec{x}$ έχει βέλτιστη λύση.
2. Για κάθε $\vec{\lambda} \in \Lambda$, βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος $\min_{\vec{x} \in A} L(\vec{x}; \vec{\lambda})$, την οποία γράφουμε ως $\vec{x}(\vec{\lambda})$ αφού εξαρτάται από το $\vec{\lambda}$.
3. Εύρεση $\vec{\lambda^*}$ που ικανοποιεί $\vec{g}(\vec{x}(\vec{\lambda^*})) = \vec{b}$. Από την Ικανή συνθήκη Lagrange, η τιμή $\vec{x^*} = \vec{x}(\vec{\lambda^*})$ των μεταβλητών απόφασης είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος $\min_{\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \vec{x} \in A} f(\vec{x})$.

Παράδειγμα 1

Ας λύσουμε ξανά το πρόβλημα $\min x + 2y$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = 1$ και $x, y \in \mathbb{R}$ με τη μέθοδο Lagrange.

Η Λαγκραντζιανή είναι $L(x, y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2)$. Παρατηρήστε ότι εάν $\lambda < 0$ τότε η ελάχιστη τιμή της Λαγκραντζιανής είναι $-\infty$, καθώς $x \to +\infty$. Συνεπώς $\Lambda = (0, +\infty)$.

Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση της ελαχιστοποίησης της Λαγκραντζιανής (χωρίς τον περιορισμό!), βρίσκουμε σημεία (x, y) που μηδενίζουν το διάνυσμα κλίσης $\nabla L(x, y; \lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\lambda x, 2 + 2\lambda) = (0, 0)$. Λύνοντας για $\lambda \in (0, +\infty)$ βρίσκουμε $x(\lambda) = \frac{-1}{2\lambda}, y(\lambda) = \frac{-1}{\lambda}$.

Τώρα θα βρούμε κατάλληλο $\lambda \in \Lambda$ λύνοντας την εξίσωση $x(\lambda)^2 + y(\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$ όπου βρίσκουμε $\lambda^* = \sqrt{5}/2$. Συνεπώς η βέλτιστη λύση είναι $x(\lambda^*) = \frac{-1}{\sqrt{5}}, y(\lambda^*) = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ εφόσον τα $x(\lambda^*), y(\lambda^*), \lambda^* = \sqrt{5}/2$ ικανοποιούν την ικανή συνθήκη Lagrange.

Παράδειγμα 2

Βρείτε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος:

$$\min \quad x+2y-z$$

έτσι ώστε $x^2+y^2+z^2=1$

$$x-2y+3z=2$$

για $x,y,z\in\mathbb{R}$

Η Λαγκραντζιανή είναι
$L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=x+2y-z+\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)+\lambda_2(x-2y+3z-2)$.
Παρατηρήστε ότι εάν $\lambda_1\leq 0$ τότε η ελάχιστη τιμή της Λαγκραντζιανής είναι $-\infty$, συνεπώς $\Lambda=\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2:\lambda_1>0\}$

Βρίσκουμε x,y,z τα οποία ελαχιστοποιούν τη Λαγκραντζιανή λύνοντας την εξίσωση
$\nabla L(x,y,z;\lambda)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} 1+2\lambda_1 x+\lambda_2 & =0\\ 2+2\lambda_1 y-2\lambda_2 & =0\\ 2\lambda_1 z-1+3\lambda_2 & =0\end{array}\right.$ για κάθε $(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda\Leftrightarrow\lambda_1>0$.

Λύνοντας βρίσκουμε $x(\lambda_1,\lambda_2)=-\dfrac{1+\lambda_2}{2\lambda_1},y(\lambda_1,\lambda_2)=\dfrac{\lambda_2-1}{\lambda_1},z(\lambda_1,\lambda_2)=\dfrac{1-3\lambda_2}{2\lambda_1}$
$x=-\dfrac{1+\lambda_2}{2\lambda_1},y=\dfrac{\lambda_2-1}{\lambda_1},z=\dfrac{1-3\lambda_2}{2\lambda_1}$ τα οποία είναι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της Λαγκραντζιανής αφού είναι κυρτή συνάρτηση.

Για να βρούμε τις τιμές των λ_1,λ_2, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί:
$\left\{\begin{array}{l} x(\lambda_1,\lambda_2)^2+y(\lambda_1,\lambda_2)^2+z(\lambda_1,\lambda_2)^2=1\\ x(\lambda_1,\lambda_2)-2y(\lambda_1,\lambda_2)+3z(\lambda_1,\lambda_2)=2\end{array}\right.$.

Λύνοντας βρίσκουμε $\lambda_1^*=\dfrac{\sqrt{30}}{5},\lambda_2^*=\dfrac{30-4\sqrt{30}}{70}$. Η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος είναι $x(\lambda_1^*,\lambda_2^*),y(\lambda_1^*,\lambda_2^*),z(\lambda_1^*,\lambda_2^*)$.