Διάλεξη 1

Διαμόρφωση προβλημάτων βελτιστοποίησης 1, Τρίτη 15/2/18

Περιεχόμενα

1. Γενική μορφή προβλημάτων βελτιστοποίησης

Κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να γραφεί στη **γενική μορφή**:

$$\text{(1)} \qquad \min f(x)$$
$$\text{έτσι ώστε } x \in A$$

όπου η συνάρτηση $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ την οποία επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε καλείται **αντικειμενική συνάρτηση**. Το πεδίο ορισμού S είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο. Το A είναι το **σύνολο των επιτρεπτών ή εφικτών σημείων** και θεωρούμε ότι η f ορίζεται στα στοιχεία του A, δηλαδή $A \subseteq S$. Η μεταβλητή x καλείται **μεταβλητή βελτιστοποίησης ή απόφασης**.

Σημασία του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης:

Η σημασία που δίνουμε στην παραπάνω διατύπωση είναι ότι ψάχνουμε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει η αντικειμενική συνάρτηση επιτρέποντας μόνο εφικτά σημεία. Συνήθως μας ενδιαφέρει η εύρεση του εφικτού σημείου όπου λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή, περισσότερο από ότι η ίδια η ελάχιστη τιμή.

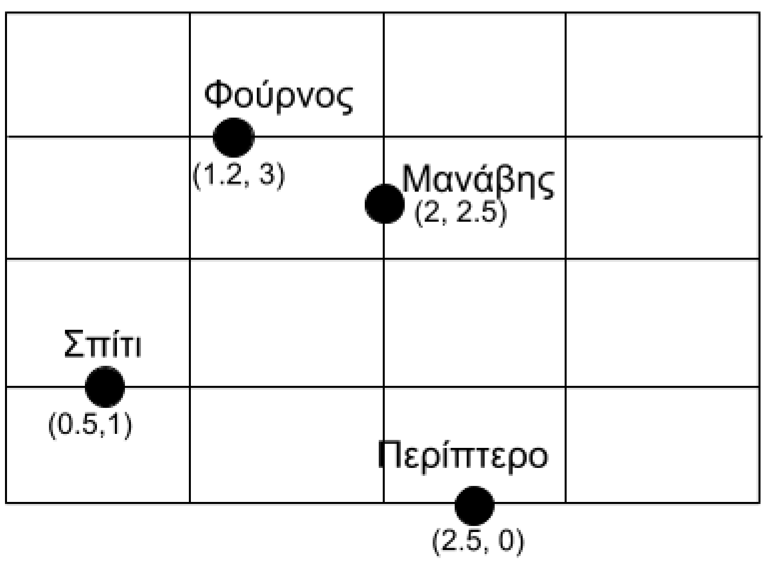
Το σημείο x^* είναι **βέλτιστη λύση** του (1) εάν: α) για $f(x^*) \leq f(x)$ κάθε $x \in A$ και β) είναι εφικτό.

Παρατηρήσεις:

1. Προβλήματα με πολλές μεταβλητές απόφασης $x_1, \ldots, x_n$ συμπεριλαμβάνονται στο παραπάνω πρόβλημα θεωρώντας τη μεταβλητή απόφασης $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
2. Προβλήματα μεγιστοποίησης $\max_{x \in A} f(x)$ μπορούν να μετατραπούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης θεωρώντας μια αντικειμενική $\min_{x \in A} -f(x)$ συνάρτηση με αντίθετο πρόσημο .
3. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να έχει πολλές βέλτιστες λύσεις ή ακόμη και καθόλου. Το σύνολο των βέλτιστων λύσεων συμβολίζεται $\arg\min_{x \in A} f(x)$.

2. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: ποια είναι η καλύτερη διαδρομή για τα καθημερινά ψώνια;



Κάθε μέρα ξεκινώντας από το σπίτι πρέπει να περάσουμε από τον φούρνο, μανάβη και περίπτερο, σε οποιαδήποτε σειρά. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή που περνά και από τις τρεις τοποθεσίες; (Εάν είχαμε μια μόνο τοποθεσία από όπου έπρεπε να περάσουμε, πχ τον φούρνο μόνο, τότε θα έπρεπε να βρούμε το ελάχιστο μονοπάτι χρησιμοποιώντας πχ, τον αλγόριθμο Dijkstra.)

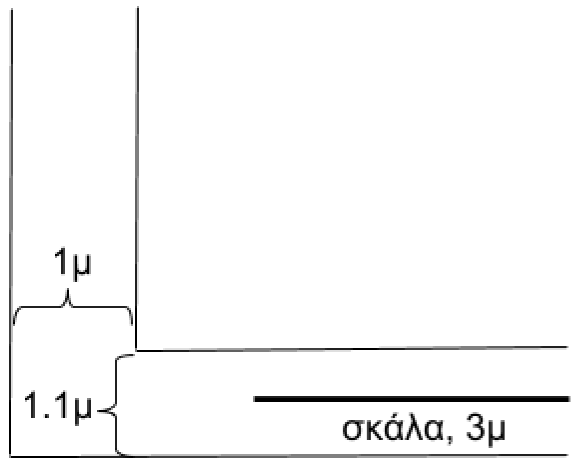
Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως “το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή”. Είναι γνωστό ότι η εύρεση της συντομότερης διαδρομής είναι δύσκολο πρόβλημα που στη χειρότερη περίπτωση θα χρειαστεί να ελεγχθούν πιθανώς όλες οι εναλλακτικές διαδρομές. Το πρόβλημα είναι ότι αυτές είναι πάρα πολλές αφού αυξάνουν εκθετικά με το αριθμό των τοποθεσιών.

Μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα στη γενική μορφή (1) σκεπτόμενοι ως εξής:
Καταρχάς παρατηρήστε ότι εάν γνωρίζαμε τη σειρά με την οποία η βέλτιστη διαδρομή επισκέπτονταν τις τρεις τοποθεσίες, θα μπορούσαμε απευθείας να υπολογίσουμε το μήκος της βέλτιστης διαδρομής. Αυτό συμβαίνει γιατί το μήκος της διαδρομής αυτής μεταξύ οποιονδήποτε δύο διαδοχικών τοποθεσιών θα πρέπει να είναι ίσο με την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο: διαφορετικά η βέλτιστη διαδρομή θα μπορούσε να βελτιωθεί και άλλο! Έτσι, εάν η βέλτιστη διαδρομή περνούσε πρώτα από τον μανάβη, μετά από τον φούρνο και τελευταία από το περίπτερο, το μήκος θα ήταν $d(\Sigma, M) + d(M, \Phi) + d(\Phi, \Pi) + d(\Pi, \Sigma)$, όπου η ελάχιστη απόσταση $d(P,Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$ μεταξύ των σημείων $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το συνολικό μήκος είναι 10.6. Συνεπώς, αυτό που θα πρέπει να βρούμε είναι η σειρά των τοποθεσιών.

Έστω $A = \{\Phi M \Pi, \Phi \Pi M, \ldots, \Pi M \Phi\}$ το σύνολο των 6 διατάξεων των τοποθεσιών. Τότε το πρόβλημα διατυπώνεται στη μορφή (1) με αντικειμενική συνάρτηση τη $f(PQR) = d(\Sigma, P) + d(P, Q) + d(Q, R) + d(R, \Sigma)$ για οποιαδήποτε σημεία P, Q, R.

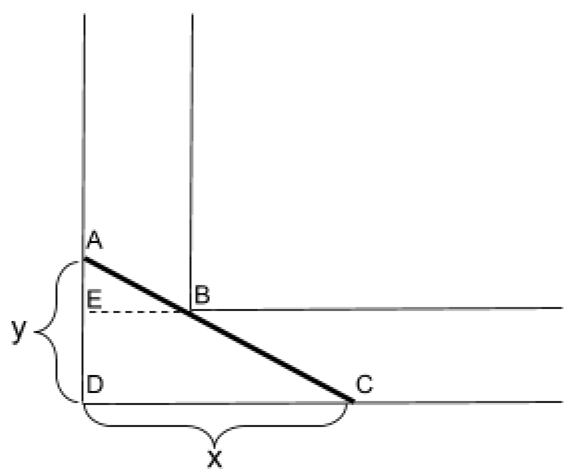
Παράδειγμα 2: χωράει η σκάλα να στρίψει;

Βλέπετε την κάτοψη μιας στροφής μεταξύ διαδρόμων πλάτους 1 και 1.1 μέτρων.



Χωράει να στρίψει μια σκάλα 3 μέτρων; (Θεωρήστε ότι η προβολή της σκάλας στο πάτωμα είναι 3 μέτρα και δε μπορεί να ελαττωθεί ανυψώνοντας κάποια άκρη.)

Αν και το πρόβλημα εξ αρχής δε φαίνεται να σχετίζεται με βελτιστοποίηση, εντούτοις μπορούμε να καταστρώσουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα: *ας βρούμε το μικρότερο μήκος σκάλας που δε χωράει να στρίψει.*
Πιο συγκεκριμένα: από όλες τις σκάλες που δε μπορούν να στρίψουν, ψάχνουμε αυτή με το μικρότερο μήκος.



Θεωρήστε μια σκάλα που δε μπορεί να στρίψει, όπως στο παραπάνω σχήμα. Θα πρέπει να εφάπτεται της γωνίας μεταξύ των εσωτερικών τοίχων και ταυτόχρονα να αγγίζει τους εξωτερικούς τοίχους. Έτσι εάν το σημείο που αγγίζει στον οριζόντιο τοίχο βρίσκεται x μέτρα από τη γωνία, τότε η απόσταση y που χτυπάει στον κάθετο τοίχο ικανοποιεί $\frac{y}{x} = y - 1.1$

(αφού τα τρίγωνα ABE και ACD είναι όμοια) ή ισοδύναμα $y = 1.1\frac{x}{x-1}$. Άρα αυτή η σκάλα έχει μήκος $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + 1.21\frac{x^2}{(x-1)^2}}$.

Το πρόβλημα εύρεσης της μικρότερης σκάλας που δε χωράει διατυπώνεται ως εξής:

$$\min x^2 + 1.21\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

έτσι ώστε $x > 1$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση και τιμή διατυπώνοντας το πρόβλημα στη γλώσσα AMPL στην ιστοσελίδα http://ampl.com/cgi-bin/ampl/amplcgi:

```
var x;
minimize f: x^2+1.21*(x^2)/(x-1)^2;
subject to c1: x>=1.001;
solve;
display x,sqrt(f);
```

Η επίλυση του προγράμματος (μέσω της ίδιας ιστοσελίδας) δίνει βέλτιστη λύση $x^* = 2.0656$ και βέλτιστη τιμή $f(x^*) = 8.81333$. (Χρησιμοποιώντας απειροστικό λογισμό, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τη βέλτιστη λύση ως $x^* = 1 + 1.21^{\frac{1}{3}}$.) Άρα η μικρότερη σκάλα που χωράει έχει μήκος $\sqrt{8.81333} = 2.96873$. Συνεπώς η σκάλα 3 μέτρων δε μπορεί να στρίψει.