YIELD MANAGEMENT – CAPACITY ALLOCATION

- p_d : DISCOUNT PRICE p_π : FULL FARE
- B : ΦΡΑΓΜΑ ΣΕ ΕΚΠΤΩΤΙΚΑ ΕΙΣΙΤΗΡΙΑ
- C : ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ
- F_d, F_π : ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ΑΥΞΗΣΗ B ΣΕ $B+1$;
- Η ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΘΕΣΗ ΚΑΤΑΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ
ΜΕ ΠΙΘ/ΤΑ $1-P(Z_d \le B)$ ΟΠΟΥ Z_d : ΖΗΤΗΣΗ ΕΚΠΤΩΤΙΚΩΝ
$= 1-F_d(B)$

- ΤΟΤΕ ΔΙΑΘΕΣΙΜΑ ΓΙΑ FULL FARE ΕΙΝΑΙ
$C-B-1$ ΕΙΣΙΤΗΡΙΑ
- ΘΑ ΥΠΑΡΞΕΙ ΑΠΩΛΕΙΑ ΑΝ Η
ΖΗΤΗΣΗ FULL FARE ΕΙΝΑΙ $C-B$ ΚΑΙ
ΑΝΩ ΠΟΥ ΘΑ ΣΥΜΒΕΙ ΜΕ ΠΙΘ/ΤΑ
$1-P(Z_\pi \le C-B-1) = 1-F_\pi(C-B-1)$

- ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΔΙΑΦΟΡΑ $B \to B+1$

$$p_d \underbrace{P(Z_\pi \le C-B-1)}_{F_\pi(C-B-1)} + (p_d - p_\pi)\left(1-F_\pi(C-B-1)\right)$$

$$= p_d - p_\pi\left(1-F_\pi(C-B-1)\right)$$

- ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΠΡΕΠΕΙ

$$F_\pi(C-B-1) < 1 - p_d/p_\pi \qquad (1)$$

<u>ΕΠΙΠΛΕΟΝ</u> ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ΑΥΞΗΣΗ
ΑΠΟ $B-1$ ΣΕ B, ΔΗΛΑΔΗ

$$p_a - p_\pi \left(1 - F_\pi(C-B)\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad F_\pi(C-B) \geq 1 - p_a/p_\pi \qquad (2)$$

· ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΟΤΙ Η ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΟ B ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ (1) + (2) ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΤΟ ΟΡΙΟ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΖΗΤΗΣΗ FULL FARES

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ · ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ Μ.Ο. 100 Τ.Α. 20. ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΜΟΝΟ ΣΕ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ.

- $C = 300 \quad p_\pi = 500 \quad p_a = 200$

ΕΧΟΥΜΕ ΟΤΙ Η $Z = (X-100)/20$ (X: ΖΗΤΗΣΗ F.FARE) ΕΙΝΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΟΠΟΤΕ ΠΡΕΠΕΙ

$Z \leq \eta^{-1}(0{,}6) = 0{,}253$ ΑΡΑ $X = 100 + 0{,}253 \cdot 20 = 105{,}06$

ΑΡΑ $C - B = 105$ Ή $B = 300 - 105 = 195$

ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΥΣΕΣ ΚΡΑΤΗΣΕΙΣ - OVERBOOKING

- ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ C
- ΠΩΛΩ Y ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΙΣΙΤΗΡΙΑ
- Z: Τ.Μ. NO SHOWS ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ $F_{NS}(x) = P(Z \leq x)$

- ΤΙΜΗ ΕΙΣΙΤΗΡΙΟΥ p

ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΗ D

- ΑΝ ΑΥΞΗΣΩ Y ΣΕ $Y+1$ ΠΛΗΡΩΝΩ ΜΙΑ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΗ ΕΦΟΣΟΝ $Z < Y+1$ ΚΑΙ $P(Z < Y+1) = P(Z \leq Y)$

$$= F_{NS}(Y)$$

- ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ ΟΦΕΛΟΣ

$$p - R\,F_{NS}(Y)$$

ΓΙΑ ΝΑ ΜΗ ΣΥΜΦΕΡΕΙ $Y \to Y+1$ $F_{NS}(Y) \geq P/R$

- ΓΙΑ ΝΑ ΣΥΜΦΕΡΕΙ $Y-1 \to Y$ ΠΡΕΠΕΙ

$$F_{NS}(Y-1) < P/R$$

- ΤΟ Y ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $p=500$ $R=1500$

Z: ΚΑΝΟΝΙΚΟ Μ.Ο. 10 Τ.Α 10

ΑΝ $F_{NS}(Y-1) < 0{,}333 \Rightarrow Y-1 < 4{,}76$

$\therefore Y < 5{,}76$ ΕΠΟΜΕΝΩΣ $\underline{Y=5}$

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ NBD

- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΕΝΟΣ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ
- ΤΥΠΙΚΟΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ
- ΜΙΑ ΠΩΛΗΣΗ ΣΕ Δt ΕΧΕΙ ΠΙΘ/ΤΑ $\lambda \Delta t$ $(\lambda = \lambda(t) \ldots)$

  ΚΑΜΜΙΑ $1 - \lambda \Delta t$
- ΚΑΜΜΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ T

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 - \lambda T/N\right)^N = \exp(-\lambda T)$$

- ΓΙΑ n ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΜΕΧΡΙ ΤΟ T:

(BERNUILLY) $$\binom{N}{n} \left(\lambda \cdot \frac{T}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{N-n}$$

$$= \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \left(1 - \lambda T \cdot \frac{1}{N}\right)^N$$

ΓΙΑ $N \to \infty$

$$\frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\lambda = 2$ ΤΕΜ/ΗΜΕΡΑ

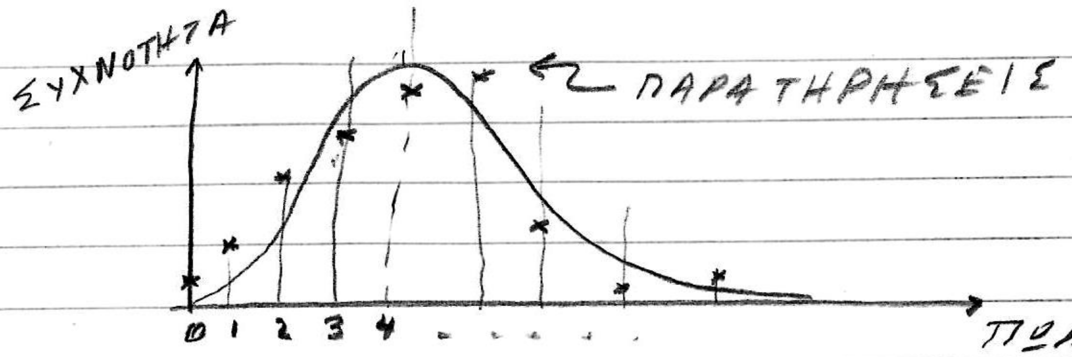
ΜΕ ΠΟΙΑ ΠΙΘ/ΤΑ 5 ΤΕΜΑΧΙΑ ΣΕ 3 ΗΜΕΡΕΣ; $\frac{6^5}{5!} e^{-6} = \underline{0,1606}$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON $E(X) = \lambda T$

$Var(X) = \lambda T$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ

- ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΕΧΟΥΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON $T = 1$ ημ.
- Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ POISSON



<u>ΥΠΟΘΕΣΗ</u>: ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON ΜΕ λ ΤΟΝ Μ.Ο. ΤΩΝ ΠΩΛΗΣΕΩΝ; ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΕΣ ΠΩΛΗΣΕΙΣ. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ χ^2. ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ.

<u>ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ</u>

<u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GAMMA</u> $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$

· ΓΙΑ ΑΚΕΡΑΙΑ $z = n$ $\quad \Gamma(n) = (n-1)!$

<u>ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAMMA ΓΙΑ ΤΟ λ</u>

$$g(\lambda \mid r, a) = \frac{a^r \lambda^{r-1} e^{-a\lambda}}{\Gamma(r)} \qquad \lambda \geq 0$$

· ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ ΠΕΛΑΤΗ ΜΕ λ ΑΠΟ ΚΑΤΑΝΟΜΗ g

· ΜΕ ΠΟΙΑ ΠΙΘ/ΤΑ ΘΑ ΑΓΟΡΑΣΕΙ n ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ; $(T=1)$

$$P(n \text{ ΠΩΛΗΣΕΙΣ}) = \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{a^r \lambda^{r-1} e^{-a\lambda}}{\Gamma(r)} d\lambda$$

$$= \frac{a^r}{n!\,\Gamma(r)} \int_0^\infty \underbrace{\lambda^{n+r-1} e^{-(a+1)\lambda}\, d\lambda}_{\text{ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GAMMA}}$$

$$= \binom{n+r-1}{n} \left(\frac{a}{a+1}\right)^r \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

· ΕΡΜΗΝΕΙΑ: n ΑΠΟΤΥΧΙΕΣ ΠΡΙΝ r ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

· NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION

$$E(n) = E(\lambda) = r/a$$

$$Var(n) = \underbrace{r/a}_{Var(\lambda)} + \underbrace{r/a^2}_{Var(n|\lambda)}$$

- ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ r, a ΑΠΟ $E(n)$, $Var(n)$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

- ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΠΕΛΑΤΕΣ ΠΟΥ ΕΙΧΑΝ n_0 ΠΩΛΗΣΕΙΣ Ο ΚΑΘΕΝΑΣ ΚΑΠΟΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ
- ΠΟΙΑ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΤΟΥΣ ΣΕ ΕΠΟΜΕΝΗ ΠΕΡΙΟΔΟ;
- ΑΝ ΑΡΧΙΚΑ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ λ ΕΙΝΑΙ $g(\cdot|r,a)$, ΠΟΙΑ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ POISSON;
- Η A POSTERIORI ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ λ ΕΙΝΑΙ $(T=1)$ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΠΙ

$$\lambda^{n_0} e^{-\lambda} \cancel{a^r} \lambda^{r-1} e^{-a\lambda} \quad \text{Η}$$

$$\lambda^{n_0+r-1} e^{-(a+1)\lambda}$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ $g(\lambda|\hat{a},\hat{r})$ $\left.\begin{array}{l}\hat{a} = a+1 \\ \hat{r} = n_0+r\end{array}\right\}$

- ΑΡΑ Η ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΑΝΑ ΠΕΛΑΤΗ ΕΙΝΑΙ $\hat{r}/\hat{a} = \dfrac{r+n_0}{a+1}$

(ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ r/a ΑΝ $n_0 > r/a$)

- **ΕΦΑΡΜΟΓΗ LKM σελ. 36**

ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΑΡΚΑΣ.

ZERO ORDER · ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ BERNOULLI

ΣΕ K ΜΑΡΚΕΣ : ΠΙΘ/ΤΑ ΓΙΑ n_i $\Sigma n_i = N$

$$\frac{N!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}$$

· ΓΙΑ ΔΥΟ ΠΙΘ/ΤΑ n $\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$

· ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ
ΔΕΝ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΟΝΤΑΙ

· ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

BETA: $b(p; a, b) = p^{a-1}(1-p)^{b-1} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ p ΚΑΤΑ BETA PRIOR

$$E(p) = a/a+b$$
$$var(p) = ab/(a+b)^2(a+b+1)$$

· ΣΕ ΕΝΑ ΠΛΗΘΥΣΜΟ ΟΠΟΥ ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΜΑΡΚΑΣ ΕΙΝΑΙ $n = \pi N$ ΣΕ N Η ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΠΙΘ/ΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΗ ΤΟΥ

$$p^{\pi N}(1-p)^{(1-\pi)N} \; p^{a-1}(1-p)^{\beta}$$

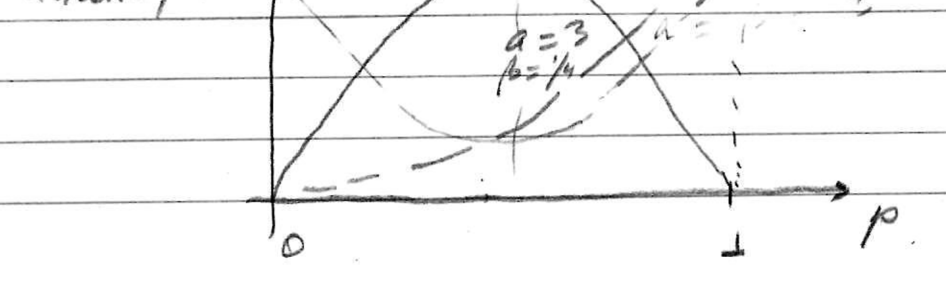
Η ΑΝΑΛΟΓΗ ΜΕ

$$p^{a+\pi N}(1-p)^{\beta+(1-\pi)N}$$

ΑΡΑ Η A POSTERIORI ΕΙΝΑΙ BETA ΜΕ

$$\hat{a} = a + \pi N \quad \hat{\beta} = \beta + (1-\pi)N$$

· ΠΟΙΚΙΛΙΑ PRIORS ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ a, β



"ΣΧΕΔΟΝ" ZERO ORDER (EHRENBERG)

BRAND SWITCHING MATRIX

· $p(i,j)$ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ, ΠΡΩΤΑ i, ΜΕΤΑ j

· $p(j/i)$ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ

· ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΠΙΝΑΚΑ, ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ

· ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ EHRENBERG:

(DATA...) $p(i,j) = k\, m_i m_j \quad i \neq j$

ΤΟΤΕ · $p(i,i) = m_i\,(1 - k(1 - m_i))$

· $k = \dfrac{1 - \sum_i p(i,i)}{1 - \sum_i m_i^2}$

ΟΠΟΤΕ (ΣΧΕΔΟΝ...) ZERO ORDER

$$p(j/i) = \begin{cases} k\, m_j & i \neq j \\ 1 - k(1 - m_j) & i = j \end{cases}$$

· ΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΕΧΟΥΣΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i

· ΑΛΛΑ Η ΠΙΘ/ΤΑ ΠΑΡΑΜΟΝΗΣ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ..

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

· ΓΙΑ ΕΝΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ ΑΝ

· P(ΕΠΟΜΕΝΟ j / ΤΡΕΧΟΝ i + ΙΣΤΟΡΙΚΟ)

= P(ΕΠΟΜΕΝΟ j / ΤΡΕΧΟΝ i)

$= p_{ij}$

· ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ ...

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ</u> $P = \{p_{ij}\}$

$P(j \text{ στο } t+2 \,/\, i \text{ στο } t) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}$ $P(i,j)$

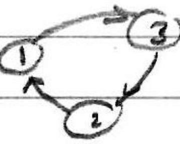
$= P^{2}_{ij}$

• $P(j \text{ στο } t+n \,/\, i \text{ στο } t) = P^{n}_{ij}$

• Η P ΕΙΝΑΙ <u>ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ</u> $\sum_j p_{ij} = 1 \;\; \forall i$

• ΕΧΕΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΙΔΙΟΤΙΜΗ 1 ΟΠΟΤΕ $\lim_{n \to \infty} P^n$ "ΔΕΝ ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ"

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΣ

• ΓΕΝΙΚΑ $\lim_{n \to \infty} P^n = P_\infty$ ΚΑΙ • $P P_\infty = P_\infty$ • $P_\infty P = P_\infty$

• $P_\infty = \begin{bmatrix} \pi_\infty \\ \pi_\infty \\ \pi_\infty \end{bmatrix}$ <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{5}(1-\pi) = \pi \rightarrow \pi = 3/8$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}511 & \cdot \\ 0{,}293 & \cdot \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}404 & \\ 0{,}357 & \end{bmatrix} \quad P^{16} = \begin{bmatrix} 0{,}376 & \cdot \\ 0{,}374 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$P^\infty = \begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \\ 0{,}375 & 0{,}625 \end{bmatrix}$$

• <u>ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ</u>: ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ!

• ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΣ <u>ΔΕΝ</u> ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΧΩΡΙΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ.-

ΕΞΑΤΟΜΙΚΕΥΜΕΝΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

P(ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ i ΕΠΙΛΕΓΕΙ m ΑΓΑΘΟ)

$$= \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^{k} w_k \beta_{i m_i k}\right)}{\sum_j \exp\left(\sum_{k=1}^{k} w_k \beta_{i j k}\right)}$$

w_k : ΣΤΑΘΜΙΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ k
<u>ΙΔΙΑ ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ !!</u>

β_{ijk} : ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ i-ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ
ΓΙΑ ΤΟ j ΑΓΑΘΟ ΣΤΟ k ΚΡΙΤΗΡΙΟ

ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ S_i

$$L = \prod_{i=1}^{N} P(\text{ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ } i \text{ ΕΠΙΛΕΓΕΙ } L(i))$$

- ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ w_k ΓΙΝΕΤΑΙ ΩΣΤΕ

$$\max_{w_k} L(w_1, \ldots, w_k ; \beta_\cdot)$$

- ΕΙΝΑΙ Η "ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ"
  - MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE.

- ΒΛΕΠΕ ΣΧΕΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ
  ΣΤΟ eclass