Εκτίμηση Παραμέτρων με την Μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

(Βλέπε το φύλλο λογισμικού MaxLikelihood στον ιστότοπο του μαθήματος)

Πως εκτιμώνται οι παράμετροι στο υπόδειγμα του Nooteboom (σελ. ΥΣ-20); Έστω ότι έχουμε καταγράψει για $i=1,..,N$ επιχειρήσεις τον αριθμό των εργαζομένων S_i, και το κατά πόσο εισήγαγε την πληροφορική (την εισαγωγή της πληροφορικής την σημειώνουμε με $X_i = 1$, διαφορετικά $X_i = 0$). Η πιθανότητα της παρατήρησης που πραγματοποιήθηκε στον i είναι:

$$\frac{[\exp(a+\beta S_i)]^{X_i}}{1+\exp(a+\beta S_i)} = \frac{\exp[X_i(a+\beta S_i)]}{1+\exp(a+\beta S_i)}$$

ενώ η πιθ/τα να προκύψουν όλες οι συγκεκριμένες μετρήσεις είναι η <u>πιθανοφάνεια</u> L

$$L(a,\beta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp[X_i(a+\beta S_i)]}{1+\exp(a+\beta S_i)}$$

Συνήθως υπολογίζουμε τον λογάριθμο της πιθανοφάνειας και εκτιμούμε τις παραμέτρους ως τις τιμές που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια ή τον λογάριθμό της:

$$\max_{a,\beta} \log \prod_{i=1}^{N}(\ldots) = \max_{a,\beta}\left\{ \sum_{i=1}^{N}\left[X_i(a+\beta S_i) - \log(1+\exp(a+\beta S_i))\right]\right\}$$

Στο φύλλο λογισμικού MaxLikelihood εφαρμόζεται η θεωρία αυτή ως εξής:

Στο αριστερό μέρος του φύλλου παράγονται τα "υποτιθέμενα" αποτελέσματα του Panel. Οι γραμμές αντιστοιχούν σε εταιρείες (στήλη B) και παράγεται γι' αυτές η υποτιθέμενη κατηγορία των όσον αφορά τους εργαζόμενους (στήλη C). Με βάση τις παραμέτρους Alpha, Beta (θέσεις C3, C4) παράγεται η πιθανότητα να εισαχθεί η πληροφορική (στήλη E) και στην στήλη D υπολογίζεται τυχαία αν εισήχθη ή όχι η πληροφορική. Οι στήλες F, G υπολογίζουν τις πιθανοφάνειες ενώ στη θέση C7 τον λογάριθμο.

Στο δεξί μέρος (στήλες I - N) υπολογίζονται αντίστοιχα μεγέθη με παραμέτρους AlphaEst και BetaEst στις θέσεις J4, J5.

Η "εκτίμηση" των παραμέτρων α, β γίνεται ως εξής:

1. Για γνωστές τιμές των Alpha, Beta παράγουμε μία υποτιθέμενη δειγματοληψία στις γραμμές 10 - 109 (ενεργοποιώντας recalculation με το πλήκτρο F9)
2. Αντιγράφουμε τις αριθμητικές τιμές (με copy - Paste Special Values) από τις στήλες Value - Choice (στήλες C - D) στις αντίστοιχες θέσεις δεξιά (στήλες J - K)
3. Θέλουμε να επιλέξουμε τα TestAlpha, TestBeta (J4, J5) ώστε να μεγιστοποιηθεί η τιμή του LogLikelihood στην θέση J7. Αυτό γίνεται με Solver (max $\boxed{J7}$ cells to vary $\boxed{J4:J5}$)

Πειραματιστείτε με την παραπάνω διαδικασία για να αξιολογήσετε αυτή την μέθοδο εκτίμησης των παραμέτρων.

Principal Components (Κύριες Συνιστώσες)

Θεωρία

Συχνά για την ανάλυση των προτιμήσεων των καταναλωτών για διάφορα ομοειδή αγαθά (π.χ. διάφορες μάρκες αυτοκινήτων) ζητάται από τους συμμετέχοντες σε ένα δείγμα (panel) να βαθμολογήσουν τις μάρκες ως προς διάφορα κριτήρια (π.χ. για τα αυτοκίνητα: Εμφάνιση, Εσωτερικός Χώρος, Επιτάχυνση, Ισχύς, Κατανάλωση Καυσίμου, κλπ.). Οι βαθμολογίες αυτές αν τα μέλη του δείγματος είναι N και τα κριτήρια K, αποτελούν ένα πίνακα X διαστάσεων $N \times K$. Συχνά όμως υπάρχει μεγάλη συσχέτιση μεταξύ των βαθμολογιών ως προς διάφορα κριτήρια. Είναι εύλογο να γίνει προσπάθεια να <u>συμπτυχθούν</u> οι μετρήσεις από K κριτήρια σε P (με $P \ll K$) νέα κριτήρια, με βάση τα οποία μπορούμε να εκφράσουμε ικανοποιητικά τα αρχικά K κριτήρια. Τα P νέα κριτήρια θα είναι οι Κύριες Συνιστώσες (Principal Components) των αρχικών μετρήσεων.

Έστω ότι εξετάζουμε τις μετρήσεις X όπου οι στήλες αντιπροσωπεύουν τα διάφορα κριτήρια ενώ οι γραμμές τα μέλη του Panel. Έστω ότι όλες οι στήλες έχουν ισχυρή συσχέτιση μεταξύ τους και έτσι είναι σχεδόν πολλαπλάσια ενός βασικού διανύσματος $\bar{p}$, είναι δηλαδή $X_i \cong \bar{p}\, a_i$ όπου X_i η i-στήλη της X και a_i αριθμός. Διανυσματικά,

$$X \approx \bar{p} \cdot (a_1\ a_2\ \ldots\ a_K) = \bar{p}\, a' \qquad a' \in R^K$$

με $a' = (a_1, a_2, \ldots, a_K)$. Προφανώς το $\bar{p}$ δεν είναι μοναδικό καθώς μπορούμε να μεταβάζουμε την κλίμακά του κατά σταθερά γράφοντας $x_i = \bar{p} a_i = (\bar{p}/\lambda)\cdot(\lambda a_i)$ οπότε το $\bar{p}/\lambda$ είναι ισοδύναμο με το p. Έτσι μπορούμε να δεχθούμε ότι $\bar{p}'\cdot\bar{p} = 1$.

Αν τώρα το $\bar{p}$ δεν είναι γνωστό, και δεν ισχύει η παραδοχή της συνεχείας όλων των σημείων του X, επιθυμούμε να διαλέξουμε τα $\bar{p} \in R^n$, $\bar{a}' \in R^k$ ώστε να έχουμε την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του X με το $\bar{p}\cdot\bar{a}'$. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει ελαχιστοποιώντας το άθροισμα τετραγώνων του πίνακα $X - \bar{p}\cdot\bar{a}'$ που ισούται με $trace([X-\bar{p}\bar{a}']'[X-\bar{p}a'])$.

Θυμηθείτε ότι $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = trace(A'A) = ίχνος(A'A)$

όπου $trace\, Q \overset{ορισμ}{=} \sum_{i=1}^{n} q_{ii}$ για τετραγωνικό $Q: n\times n$]

Επομένως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση

$$tr(X-\bar{p}a')'(X-\bar{p}a')$$
$$= tr(X'X) - tr(ap'X) - tr(X'pa') + tr(ap'pa')$$
$$= tr(X'X) - 2p'Xa + a'a$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες

$tr(ap'X) = tr\, p'Xa = p'Xa$ και

$tr(ap'pa') = tr(p'p\, a'a) = tr(a'a) = a'a$

(που προκύπτουν εύκολα $tr\, AB = tr\, BA$ για $A: m\times n$ $B: n\times m$ — επιβεβαιώστε την σχέση).

Επομένως για δεδομένο p, το a προκύπτει ελαχιστοποιώντας την παράσταση $-2p'Xa + a'a$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς το a έχουμε ότι $a^* = X'p$ για το βέλτιστο $a = a^*$. Εισάγοντας το a αυτό στην παράσταση $tr(X-pa')'(X-pa')$

$= tr\,X'X - 2pXa + a'a = tr\,X'X - 2pXX'p + p'XX'p$

$=$ σταθ $- p'XX'p$

Δεδομένου ότι $p'p=1$ η ελαχιστοποίηση του σφάλματος γίνεται εξετάζοντας την συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L} = -p'XX'p + \lambda(p'p-1)$$

από όπου προκύπτει ότι το p πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $XX'p = \lambda p$

πράγμα που δείχνει ότι το p είναι <u>ιδιοδιάνυσμα</u> του πίνακα XX'. Προφανώς απαιτούμε το p να είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή (ο πίνακας XX' είναι θετικά ορισμένος αν $X: m\times n$ με $Rank(X)=m$, εδώ όμως ο X <u>δεν</u> είναι αντιστρέψιμος)

Το ιδιοδιάνυσμα αυτό συμβολίζεται με p_1, με συνιστώσα a_1 και ονομάζεται first principal component.

Αν τώρα επιδιώκουμε καλύτερη προσέγγιση των μετρήσεων με χρήση ενός διανύσματος p_2 με συνιστώσες a_2', εξετάζουμε την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των στοιχείων του πίνακα

$$X - p_1a_1' - p_2a_2'$$

ως προς p_2, a_2. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το βέλτιστο p_2 είναι κάθετο στο p_1 ($p_1'p_2 = 0$).

Μετά από υπολογισμούς αντίστοιχους με τους προηγούμενους προκύπτει ότι $a_2 = X'p_2$ και ότι το p_2 είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα XX' που αντιστοιχεί στην 2η μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο εισάγοντας τα $p_1, p_2, \ldots, p_k$

(Παρατηρείστε ότι ο πίνακας XX' δεν είναι αντιστρέψιμος εφόσον N - ο αριθμός των παρατηρήσεων, των μηνών του Panel, είναι μεγαλύτερος του K - αριθμός των κριτηρίων άρα ο XX' είναι μόνο θετικά ημιορισμένος)

Στην πράξη οι μετρήσεις X_{ik} $i=1,\dots,N$ για το κριτήριο k κανονικοποιούνται με αφαίρεση του μέσου $\bar{X}_k = (\sum_i X_{ik})/N$ και διαίρεση διά της τυπικής απόκλισης $\sigma_k = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_{ik}-\bar{X}_k)^2\right)^{1/2}$.

Αν χρησιμοποιηθεί για την εξήγηση των X η πρώτη κύρια συνιστώσα εξηγείται μέρος $\lambda_1 / \sum_{i=1}^{K}\lambda_i$ της συνολικής διακύμανσης των παρατηρήσεων, όπου λ_i η ιδιοτιμή της i συνιστώσας. Αν χρησιμοποιηθούν m ιδιοδιανύσματα εξηγείται μέρος $(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i)/(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i)$ της διακύμανσης*.

Προφανώς ο αριθμός των συνιστωσών που θα επιλέξουμε καθορίζεται κατά την κρίση του μελετητή σταθμίζοντας αφενός το ποσοστό που εξηγούμε σε αντιπαράθεση με το γεγονός λίγων συνιστωσών. Έτσι αν π.χ. είναι $K=10$ $\lambda_1=12$ $\lambda_2=8$ $\lambda_3=5$ $\lambda_4\simeq\dots\simeq\lambda_{10}\simeq 1$ είναι $\Sigma\lambda_i = 27$. Επιλέγοντας τα P_1, P_2, P_3 μόνο εξηγούμε $25/32 \simeq 84\%$ της αρχικής διακύμανσης!

Εφαρμογή στο Marketing

Στην σελ. 80 κ.ε. του LKM δίνεται η θεωρία και η εφαρμογή της παραπάνω ανάλυσης στο Marketing. Προϊόντα j βαθμολογούνται ως προς κριτήρια k από μέλη ενός panel $i=1,\dots,N$. Έστω X_{ijk} η βαθμολογία ως προς το κριτήριο k του j προϊόντος από το i καταναλωτή. Οι $r=1,2,\dots R$ συνιστώσες F_r δημιουργούνται ως γραμμικός συνδυασμός των βαθμολογιών.

(* Αν $XX' = P\Lambda P^{-1}$ και $\mathrm{tr}\,XX' = \mathrm{tr}(P\Lambda P^{-1}) = \mathrm{tr}(PP^{-1}\Lambda) = \sum_{i=1}^{K}\lambda_i$, ενώ είναι $\bar{p}a = pp'X$ όπου $\mathrm{tr}\,pa'(pa)' = \lambda$)

$$F_{ijr} = \sum_{k=1}^{K} b_{rk} x_{ijk} + \text{σφάλμα}$$

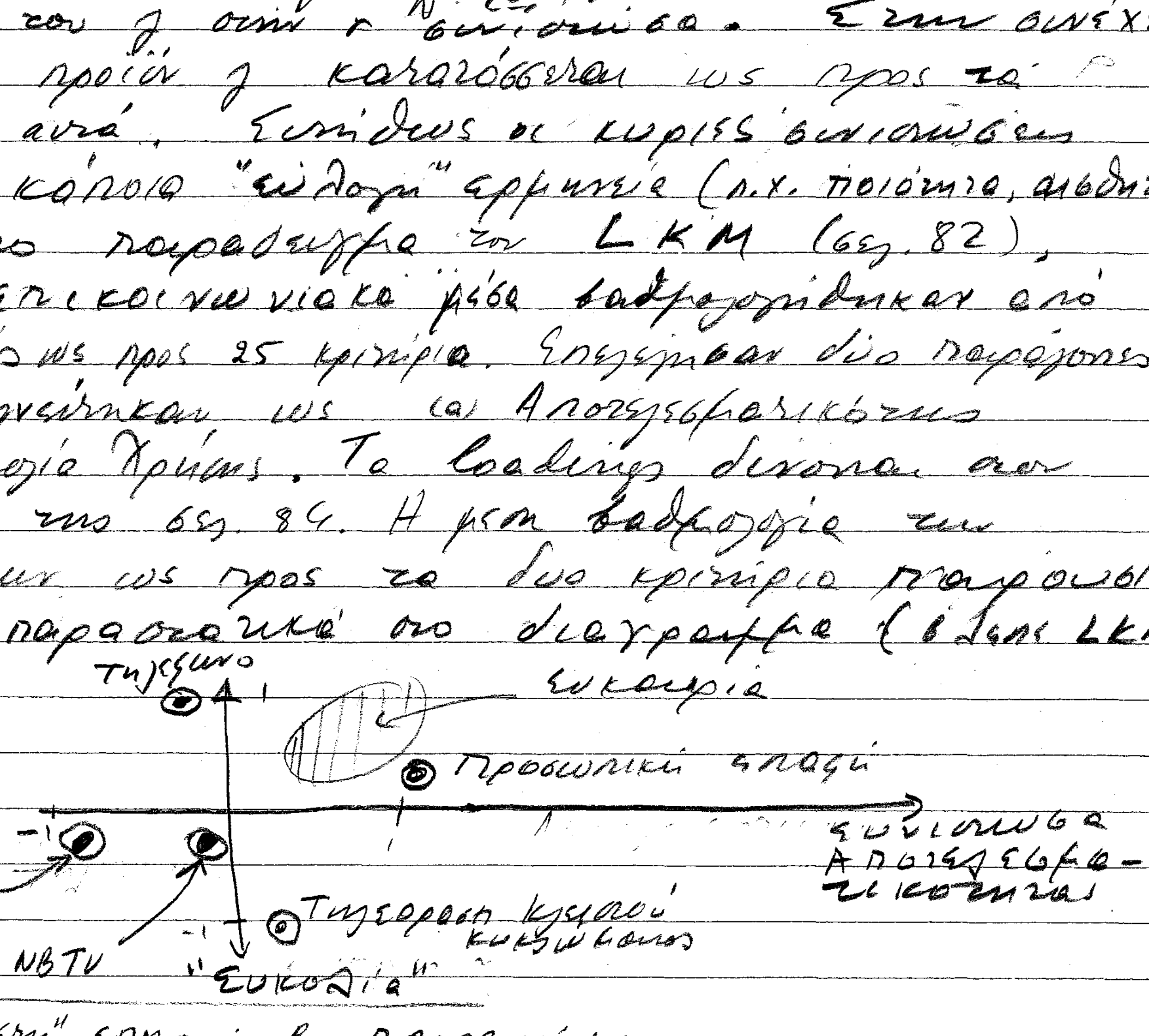
με τα b να υπολογίζονται έτσι ώστε τα x_{ijk} να εξηγούνται επαρκώς από τα F, δηλαδή

$$x_{ijk} = \sum_{r=1}^{p} a_{kr} F_{ijr} + d_k Y_{ij} + \text{σφάλμα}$$

όπου p προκαθορισμένος αριθμός παραγόντων και το Y_{ij} ένας πρόσθετος παράγων που έχει σκοπό να καλύψει τα σφάλματα που προκύπτουν από την*

Στην ανάλυση προϊόντων, συνήθως για το προϊόν j καταγράφεται ο μέσος όρος των βαθμολογιών στο panel: $\bar{F}_{jr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{ijr}$ είναι η "βαθμολογία" του j στην r "συνιστώσα". Στη συνέχεια το προϊόν j κατατάσσεται ως προς τα κριτήρια αυτά. Συνήθως οι κύριες συνιστώσες έχουν κάποια "εύλογη" ερμηνεία (π.χ. ποιότητα, αισθητική)

Στο παράδειγμα του LKM (σελ. 82), πέντε επικοινωνιακά μέσα βαθμολογήθηκαν από 41 ειδικούς ως προς 25 κριτήρια. Επελέγησαν δύο παράγοντες που ερμηνεύτηκαν ως (α) Αποτελεσματικότητα (β) Ευκολία Χρήσης. Τα loadings δίνονται στον πίνακα της σελ. 84. Η μέση βαθμολογία των προϊόντων ως προς τα δύο κριτήρια παρουσιάσθηκε παραστατικά στο διάγραμμα (βλέπε LKM)



* "αυθαίρετη" επιλογή p παραγόντων

Το διάγραμμα δείχνει ότι όλα τα προϊόντα είναι προβληματικά, και υπάρχει επιχειρηματική ευκαιρία από να σχεδιασθεί ένα προϊόν στην ανοικτή περιοχή του διαγράμματος.

Παρατηρήσεις: Στην περιγραφή της παραπάνω εργασίας των Hauser & Shugan στο βιβλίο των LKM υπάρχουν κάποια σφάλματα. Πρώτον, όλα τα στοιχεία των "φορτίσεων" στον πίνακα της σελ. 4 είναι θετικά (διαφορετικά η ερμηνεία δεν έχει νόημα). Δεύτερον, η κατασκευή των παραγόντων γίνεται με άλλες μεθόδους και όχι την μέθοδο των ιδιοτιμών. Όμως τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι παρεμφερή με αυτά της ανάλυσης μέσω ιδιοτιμών.

(Βλέπε το απόσπασμα από το σύγγραμμα Theil: Econometrics : PrincComp Theil.pdf στον ιστότοπο).

Yield Management

Μία πτήση εξυπηρετείται από ένα αεροσκάφος C θέσεων. Υπάρχει η εκπτωτική τιμή p_d και η πλήρης τιμή p_n. Η εκπτωτική τιμή ισχύει για κρατήσεις που γίνονται τουλάχιστον D ημέρες πριν την πτήση. Η κατανομή της ζήτησης έχει αθρ. κατανομή F_d για τους εκπτωτικούς πελάτες και F_n για την πλήρη τιμή. Θέλουμε να καθορίσουμε ένα αριθμό θέσεων B που περιορίζει ως άνω φράγμα τον αριθμό εκπτωτικών κρατήσεων. Πώς πρέπει να οριστεί το B ώστε να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο έσοδο;

Εξετάζουμε την αύξηση του B κατά 1. Η B+1 θέση θα κρατηθεί με πιθ/τα $1-P(\tilde{Z}_d \le B)^{*} = 1-F_d(B)$, ενώ αν δεν κρατηθεί η αύξηση του B <u>δεν</u> επηρεάζει το αποτέλεσμα. Αν κρατηθεί η θέση και η ζήτηση με πλήρες εισιτήριο είναι $C-(B+1)$ και κάτω, δεν θα χάσουμε τίποτα από τον επιβάτη αυτόν αλλά θα έχουμε επιπλέον έσοδο p_d. Αυτό θα συμβεί με πιθ/τα $P(\tilde{Z}_n \le C-B-1) = F_n(C-B-1)$. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε απώλεια εσόδων p_n, με καθαρό κέρδος $p_d - p_n$ (<0). Το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$$(1-F_d(B))\left(F_n(C-B-1)p_d + (1-F_n(C-B-1))(p_d-p_n)\right)$$

Για να <u>μην</u> συμφέρει η αύξηση του B σε B+1 πρέπει

$$p_d - p_n + p_n F_n(C-B-1) \le 0$$

ή $$F_n(C-B-1) \le 1 - p_d/p_n$$

Με αντίστοιχο σκεπτικό, για να συμφέρει η αύξηση του ορίου από B-1 σε B πρέπει

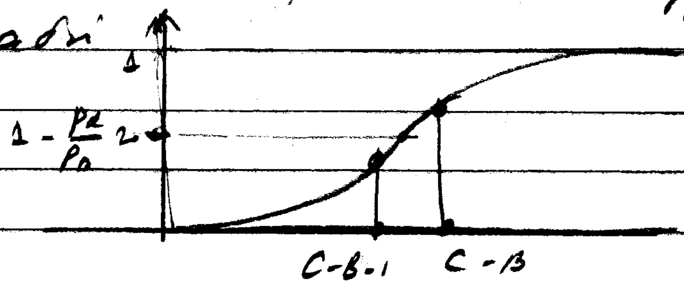
(*) $\tilde{Z}_d$: Η τυχ. μετ. της εκπτωτικής ζήτησης, $\tilde{Z}_n$ της πλήρους εισιτηρίου

$$F_\pi(C-B) \geq 1 - p_d/p_\pi$$

Έτσι το B προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$F_\pi(C-B-1) \leq 1 - p_d/p_\pi \leq F_\pi(C-B)$$

δηλαδή



<u>Παράδειγμα</u> Έστω $C=120$, $p_d=100$ $p_\pi=150$ και η ζήτηση για εισιτήρια χωρίς έκπτωση είναι διακριτή στο 1-200 με ομοιόμορφη πιθ/τα $1/200$. Έτσι $F(C-B) = \frac{120-B}{200}$ και άρα το βέλτιστο B προσδιορίζεται από τη σχέση $\frac{120-B-1}{200} \leq 1 - \frac{100}{150} \leq \frac{120-B}{200}$

ή $119 \leq \frac{200}{3} + B \leq 120 \rightarrow 52{,}3 < B < 53{,}3$

και άρα $B=53$.

<u>Συνεχείς μεταβλητές</u> Πολλές φορές χρησιμοποιούμε συνεχείς αντί για διακριτές τυχ. μεταβλητές για να παρουσιάσουμε την ζήτηση. Έτσι, έστω ότι η εκπτωτική ζήτηση Z_d είναι τ.μ. με πυκνότητα f_d και για τους μη εκπτωτικούς Z_π και f_π αντίστοιχα. Αν τώρα δέσουμε ένα άνω φράγμα B στους εκπτωτικούς πελάτες το αναμενόμενο έσοδο δίνεται από τη παράσταση

$$G_d(B) = p_d\left[\int_0^B t\, f_d(t)\,dt + \int_B^\infty B\, f_d(t)\,dt\right]$$

για τους εκδρομικούς και

$$G_n(B) = p_n\left[\int_0^B\left(\int_0^{C-t} \sigma f_n(\sigma)\,d\sigma + \int_{C-t}^\infty (C-t) f_t(\sigma)\,d\sigma\right) f_d(t)\,dt\right.$$

$$\left. + \int_B^\infty\left(\int_0^{C-B} \sigma f_n(\sigma)\,d\sigma + \int_{C-B}^\infty (C-B) f_t(\sigma)\,d\sigma\right) f_d(t)\,dt\right]$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το αναμενόμενο έσοδο όταν οι εκδρομικοί πελάτες είναι έως B, ενώ το δεύτερο αν οι εκδρομικοί πελάτες είναι άνω του B. Το πρώτο ολοκλήρωμα μέσα στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι η περίπτωση όπου οι μη εκδρομικοί πελάτες είναι κάτω των $C-t$ με C: χωρητικότης αεροσκάφους και t οι εκδρομικοί πελάτες. Ερμηνεύστε τους υπόλοιπους όρους στην παράσταση.

Η παραγώγιση των παραστάσεων είναι $G_d'(B) = p_d(1-F_d(B))$

ενώ $G_n'(B) = -p_n(1-F_n(C-B))(1-F_d(B))$

και η παράγωγος του συνολικού εσόδου είναι

$$G_d'(B) + G_n'(B) = (1-F_d(B))(p_d - p_n + p_n F_n(C-B))$$

Η παράγωγος μηδενίζεται όταν

$$F_n(C-B) = 1 - p_d/p_n$$

που συμφωνεί με τα προηγούμενα.
Επιβεβαιώστε ότι η δεύτερη παράγωγος στο B^* (όπου $F_n(C-B^*) = 1 - Pd/p_n$), είναι αρνητική, εφόσον $f_n(B^*) > 0$!

Υπερβάλλοντα εισιτήρια

Σε κάθε πτήση υπάρχει συχνά αριθμός επιβατών που αναβάλουν το ταξίδι την τελευταία στιγμή, διατηρώντας έτσι κενές θέσεις. Ως εκ τούτου συχνά πωλούνται περισσότερα εισιτήρια από τις διαθέσιμες θέσεις. Αν όμως εμφανισθούν όλοι σχεδόν οι κάτοχοι εισιτηρίων, η εταιρεία τιμωρείται κάπως αποζημιώνοντας, έστω C για κάθε επιβάτη που δεν εξυπηρετείται. Ποιός είναι ο βέλτιστος αριθμός των επιπλέον εισιτηρίων; Έστω Y τα επιπλέον εισιτήρια και $\tilde{X}$ η τυχαία μεταβλητή που υποδηλώνει τους επιβάτες που δεν θα εμφανισθούν, με κατανομή F και πυκνότητα f.

Ένα πρώτο υπόδειγμα στηρίζεται στην παραδοχή ότι η ζήτηση είναι τέτοια ώστε να μπορούμε να πουλήσουμε οποιονδήποτε αριθμό εισιτηρίων προς τιμή B το καθένα. Αν δεν εμφανισθούν $\tilde{X}$ κάτοχοι εισιτηρίων τότε δεν θα εξυπηρετηθούν $Y-\tilde{X}$ κάτοχοι αν $\tilde{X}\le Y$ και μηδέν διαφορετικά. Έτσι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος είναι

$$G(Y) = BY - C\int_0^Y (Y-x) f(x)\,dx$$

Είναι $G'(Y) = B - C\int_0^Y f(x)\,dx = B - CF(Y)$

Άρα το βέλτιστο επίπεδο αποθεμάτων κρατήσεων Y^* ικανοποιεί $F(Y^*) = B/C$

Θυμηθείτε ότι αγνοούμε ακεραιότητα. Πώς θα αναλύαμε το υπόδειγμα αν έπρεπε να ληφθεί υπόψη η ακεραιότητα; Προφανώς δεν συμφέρει να αυξήσουμε κάποιο Y σε $Y+1$ αν το πρόσθετο όφελος B είναι μικρότερο από την αναμενόμενη ζημία που είναι $CP(\tilde{X} \le Y) = CF(Y)$ ή $B/C \le F(Y)$. Αν συμφέρει η μετάβαση από $Y-1$ σε Y πρέπει $B/C > F(Y-1)$. Οι δύο σχέσεις αυτές προσδιορίζουν μονοσήμαντα το Y^*.

Σε ένα άλλο υπόδειγμα, αγνοούμε το έσοδο και αντ' αυτού εξετάζουμε την αναμενόμενη ζημία συν το αναμενόμενο διαφυγόν κέρδος και ελαχιστοποιούμε. Θα έχουμε διαφυγόν κέρδος αν $\tilde{X} > Y$ και η αναμενόμενη τιμή είναι $B\int_Y^\infty (x-Y) f(x)\,dx$ όπου B η τιμή του εισιτηρίου. Η συνολική ζημία + διαφυγόν κέρδος είναι

$$G_1(Y) = C\int_0^Y (Y-x) f(x)\,dx + B\int_Y^\infty (x-Y) f(x)\,dx$$

Είναι $C_1'(Y) = C\int_0^Y f(x)dx - B\int_Y^\infty f(x)dx$

$$= CF(Y) - B(1 - F(Y))$$

Θέτοντας $C_1'(Y^*) = 0$ προκύπτει

$$F(Y^*) = B/(B+C)$$

Αν $B \ll C$, τα δύο υποδείγματα δεν έχουν σημαντική διαφορά.

Τι θα συνέβαινε αν μεγιστοποιούσαμε το έσοδο μείον το άθροισμα ζημίας και διαφυγόντος κέρδους;