

Στατιστική για Οικονομολόγους -- 6^ο Σύνολο Ασκήσεων
Εβδομάδα 1-4-2019

ΔΕΟΣ, Β' εξάμηνο – καθ Γιάννης Μπίλιας (bilias@aueb.gr)

ΟΔΗΓΙΕΣ: Στο φροντιστήριο να λυθούν οι ασκήσεις 2, 3.d, 3.e, 4.b, 4.c, 4.d, 6(ολόκληρη), 7(ολόκληρη).

Άσκηση 1

Έστω η τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή (standard normal distribution), δηλαδή $Z \sim N(0,1)$. Να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

a) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

b) $P(-2 \leq Z \leq 2)$

c) $P(-3 \leq Z \leq 3)$

d1) $P(Z \geq 1,28)$ και $P(-1,28 \leq Z \leq 1,28)$

d2) $P(Z \geq 1,645)$ και $P(-1,645 \leq Z \leq 1,645)$

d3) $P(Z \geq 1,96)$ και $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96)$

d4) $P(Z \geq 2,33)$ και $P(-2,33 \leq Z \leq 2,33)$

d5) $P(Z \geq 2,58)$ και $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58)$

e) $P(-1 \leq Z \leq 2,33)$

➤ **Άσκηση 2**

Έστω η τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή (standard normal distribution), δηλαδή $Z \sim N(0,1)$. Να βρείτε την τιμή z_0 της τυχαίας μεταβλητής Z τέτοια ώστε:

a) $P(Z \leq z_0) = 0,7090$

b) $P(Z \leq z_0) = 0,2090$

c) $P(-z_0 \leq Z \leq z_0) = 0,1664$

d) $P(z_0 \leq Z \leq 0) = 0,4798$

Άσκηση 3

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή (normal distribution) με μέσο 11 και τυπική απόκλιση 2, δηλαδή $X \sim N(11,4)$. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

a) $P(10 \leq X \leq 12)$

b) $P(6 \leq X \leq 10)$

c) $P(13 \leq X \leq 16)$

➤ d) $P(7,8 \leq X \leq 12,6)$

➤ e) $P(X \geq 13,24)$

f) $P(X \geq 7,62)$

Άσκηση 4

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή (normal distribution) με $\mu=50$ και $\sigma=3$, δηλαδή $X \sim N(50,9)$. Να βρείτε την τιμή x_0 της τυχαίας μεταβλητής X τέτοια ώστε:

- a) $P(X \leq x_0) = 0,8413$
- b) $P(X > x_0) = 0,0250$
- c) $P(X > x_0) = 0,95$
- d) $P(41 \leq X \leq x_0) = 0,8630$
- e) 10% των τιμών της X είναι μικρότερες της x_0 .
- f) 1% των τιμών της X είναι μεγαλύτερες της x_0 .

Άσκηση 5

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή (normal distribution) με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ , δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

- a) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
- b) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
- c) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$
- d) Να δειχθεί ότι:

$$\frac{IQR}{\sigma} = 1,34 \text{ όπου } IQR = \text{interquartile range} = x_{0,75} - x_{0,25}.$$

Σημείωση: Τα ευρήματα a)-d) αποτελούν χαρακτηριστικά μια κανονικής κατανομής. Χρησιμοποιούνται για γραφικό έλεγχο της κανονικότητας ενός δείγματος μετρήσεων. Συστήνεται να τα θυμάστε.

➤ Άσκηση 6

Μία επιχείρηση κατασκευάζει λάμπες των οποίων η διάρκεια ζωής κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή με μέση τιμή 1200 ώρες και τυπική απόκλιση 250 ώρες.

A) Εάν επιλεγεί μια λάμπα τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να έχει διάρκεια ζωής μεταξύ 900 και 1300 ωρών; [Απ.: 0,5403]

Στα ερωτήματα B) και Γ) προσφέρεται ένα κλασσικό παράδειγμα σύνδεσης της διωνυμικής κατανομής με την κανονική κατανομή. Το γεγονός «η διάρκεια ζωής να είναι μεταξύ 900 και 1300 ωρών» να θεωρηθεί ως επιτυχία με πιθανότητα $p=0,5403$.

B) Έστω ότι επιλέγονται με τυχαίο τρόπο 5 λάμπες. Ποια η πιθανότητα οι 3 από αυτές να έχουν διάρκεια ζωής μεταξύ 900 και 1300 ωρών;

Γ) Έστω ότι επιλέγονται με τυχαίο τρόπο 100 λάμπες. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός λαμπών με διάρκεια ζωής μεταξύ 900 και 1300 ωρών; [Απ.: Περίπου 54 λάμπες.]

➤ **Άσκηση 7**

Μία εξέταση σε μάθημα οικονομικών δίνεται σε μεγάλο αριθμό φοιτητών. Οι βαθμοί του διαγωνίσματος κατανέμονται κανονικά με μέσο 60 και τυπική απόκλιση 15.

A) Τι ποσοστό φοιτητών παίρνουν βαθμό μεταξύ 85 και 95; [Απ.: 3,76%]

B) Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός (cutoff point) για το υψηλότερο (καλύτερο) 10% των φοιτητών; [Απ.: $60 + (1,28)(15) = 79,2$]

Γ) Ποιος είναι ο μέγιστος βαθμός (cutoff point) για το χαμηλότερο (χειρότερο) 10% των φοιτητών; [Απ.: $60 - (1,28)(15) = 40,8$]