

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ 2

19/8/2004

Απαντήστε σε ένα από τα δυο θεματα.

ΘΕΜΑ 1

Εστω οικονομία που αποτελείται από δυο παίκτες ,A και B, δυο αγαθα, X και Y, και δυο επιχειρησεις, α και β .

Οι προτιμήσεις των παικτων περιγραφονται από τις συναρτησεις

$$U_A = \log X_A + \log Y_A, U_B = \log X_B + \log Y_B$$

Ο κάθε παίκτης εχει δυο μοναδες του αγαθου X.

Ο παίκτης A είναι ιδιοκτητης της επιχειρησης α .

Ο παίκτης B είναι ιδιοκτητης της επιχειρησης β .

Το αγαθο Y παραγεται από το X.

Οι συναρτησεις παραγωγης των δυο επιχειρησεων είναι

$$Y_\alpha = 20\sqrt{X_\alpha}, Y_\beta = X_\beta$$

Τα κερδη Π_α, Π_β των επιχειρησεων α, β φορολογουνται με φορο ανα μοναδα

t , οπου t είναι παραμετρος με την ιδιοτητα $0 \leq t < 1$. Τα φορολογικα εσοδα

$R = t(\Pi_\alpha + \Pi_\beta)$ μοιραζονται εξισου μεταξυ των δυο παικτων A και B με εφραπαξ μεταβιβασεις.

1. Να υπολογιστει η ανταγωνιστικη ισορροπια της οικονομιας αυτης.
2. Ποιος παίκτης οφελειται όταν ο φορος t αυξανεται;
3. Είναι αυτή η ισορροπια αριστη κατά Pareto;

Απαντησεις

1.

- Τιμες

$w = 1$ για το X, p για το Y.

- Εισοδηματα

$$M_A = 2 + (1 - t)\Pi_\alpha + \frac{R}{2}$$

$$M_B = 2 + (1 - t)\Pi_\beta + \frac{R}{2}$$

- Συναρτησεις ζητησης των παικτων

$$X_i = \frac{M_i}{2}, Y_i = \frac{M_i}{2p}, i = A, B$$

- Συναρτησεις κερδους των επιχειρησεων προ της φορολογιας

$$\Pi_\alpha = pY_\alpha - X_\alpha = 20p\sqrt{X_\alpha} - X_\alpha$$

$$\Pi_\beta = pY_\beta - X_\beta = pX_\beta - X_\beta$$

- Συνθηκες μεγιστοποιησης των $(1 - t)\Pi_\alpha, (1 - t)\Pi_\beta$

$$X_\alpha = 100p^2, Y_\alpha = 200p, \Pi_\alpha = 100p^2$$

$$p \leq 1, \Pi_\beta = (p - 1)X_\beta = 0$$

- Συνθηκες ισορροπιας

$$Y_A + Y_B = 20\sqrt{X_\alpha} + X_\beta$$

$$X_A + X_B + X_\alpha + X_\beta = 4$$

Λυνοντας εχουμε

$$\text{sols} := \left\{ X_B = 1 + \frac{t}{3}, X_A = \frac{5}{3} - \frac{t}{3}, Y_A = \frac{25\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}t}{3}, Y_B = \frac{5(3+t)\sqrt{3}}{3}, X_\beta = 0, Y_\beta = 0, X_\alpha = \frac{4}{3}, p = \frac{\sqrt{3}}{15} \right\}$$

2. Οι χρησιμοθητες ισορροπιας είναι

$$U_A := \ln(5) - \frac{3}{2} \ln(3) + 2 \ln(5-t)$$

$$U_B := \ln(5) - \frac{3}{2} \ln(3) + 2 \ln(3+t)$$

$$\frac{dU_A}{dt} = \frac{-2}{5-t} < 0$$

$$\frac{dU_B}{dt} = \frac{2}{3+t} > 0$$

Οφελείται ο Β.

3. Εξεταζουμε αν η λυση

$$\text{sols} := \left\{ X_B = 1 + \frac{t}{3}, X_A = \frac{5}{3} - \frac{t}{3}, Y_A = \frac{25\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}t}{3}, Y_B = \frac{5(3+t)\sqrt{3}}{3}, X_\beta = 0, Y_\beta = 0, X_\alpha = \frac{4}{3}, p = \frac{\sqrt{3}}{15} \right\}$$

ικανοποιει τις συνθηκες πρωτης ταξης του (κοιλου) προβληματος μεγιστοποιησης

$$\max U_A = \ln X_A + \ln Y_A$$

$$U_B = \ln X_B + \ln Y_B \geq \ln(5) - \frac{3}{2} \ln(3) + 2 \ln(3+t)$$

$$Y_A + Y_B = 20\sqrt{X_\alpha} + X_\beta$$

$$X_A + X_B + X_\alpha + X_\beta = 4$$

Η sols ικανοποιει ολους τους περιορισμους

Οι συνθηκες πρωτης ταξης είναι

$$\frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{10}{\sqrt{X_A}} \geq 1$$

Η συνθηκη ικανοποιείται από τη sols. Ολοι οι λογοι ισοουνται με $5\sqrt{3}$. Αρα η ισορροπια είναι αριστη κατά Pareto. Η φορολογια των κερδων είναι συμβατη με την αποτελεσματικοτητα.

ΘΕΜΑ 2

Εστω οικονομία που αποτελείται από δυο παίκτες ,A και B, μια επιχείρηση, και δυο αγαθά, X και Y.

Το Y παράγεται από το X με συνάρτηση παραγωγής

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{if } X \leq 1 \\ X - 1 & \text{if } X \geq 1 \end{cases}$$

Οι προτιμήσεις των παικτών περιγράφονται από τις συναρτήσεις

$$U_A = Y_A + 2\sqrt{X_A}$$

$$U_B = X_B$$

Ο παίκτης A έχει 12 μονάδες του αγαθού X.

Ο παίκτης B είναι ιδιοκτήτης της επιχείρησης.

Να υπολογιστούν οι ανταγωνιστικές και μονοπωλιακές ισορροπίες της οικονομίας αυτής, και να αξιολογηθούν με το κριτήριο Pareto.

(Τυποποιήστε την τιμή του X στο 1, και χρησιμοποιήστε την αντιστροφή συνάρτηση παραγωγής. Ο μονοπωλητής επιλέγει την τιμή του Y).

Απαντήσεις

1. Η ανταγωνιστική ισορροπία δεν υπάρχει.

2. Υπολογισμός της μονοπωλιακής ισορροπίας

- Τιμές

$w = 1$ για το X, p για το Y.

- Εισοδήματα

$$M_A = 12$$

$$M_B = \Pi$$

- Συναρτήσεις ζήτησης των παικτών

$$(X_A, Y_A) = \begin{cases} (p^2, \frac{12 - p^2}{p}) & \text{if } p^2 \leq 12 \\ (\frac{12}{p}, 0) & \text{if } p^2 \geq 12 \end{cases}$$

$$X_B = \Pi$$

- Συναρτηση κερδους

$$\Pi = \begin{cases} pY - Y - 1 & \text{if } Y > 0 \\ 0 & \text{if } Y = 0 \end{cases}, Y = Y_A$$

Άρα

$$\Pi = \begin{cases} (p - 1) \frac{12 - p^2}{p} - 1 & \text{if } p^2 \leq 12 \\ 0 & \text{if } p^2 \geq 12 \end{cases}$$

Η μεγιστοποίηση ως προς p δίνει

$$p = 2, \Pi = 3$$

Η μονοπωλιακή ισορροπία είναι

$p = 2$
$X_A = 4 = Y_A, U_A = 8$
$U_B = X_B = 3$
$Y = 4, X = 5$

3. Εξετάζουμε αν η μονοπωλιακή ισορροπία λύνει το (κοίλο) πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max U_A = Y_A + 2\sqrt{X_A}$$

$$U_B = X_B \geq 3$$

$$Y \leq Y_A$$

$$X_A + X_B + X \leq 12$$

$$X = Y + 1$$

Η λύση είναι

$X_A = 1, Y_A = 7, U_A = 9$
$U_B = X_B = 3$
$Y = 7, X = 8$

Άρα η μονοπωλιακή ισορροπία είναι σπαταλή, και το μέγεθος της σπαταλής είναι

$$\frac{9-8}{8} 100 = 12.5\%$$