<u>Να απαντηθούν όλες οι ερωτήσεις</u>.

Θεωρούμε οικονομία με

- δυο καταναλωτες,τους 1 και 2
- τρία αγαθα,τα A, X, K.
- μια επιχείρηση.

Το αγαθό A παράγεται από τα αγαθά X, K με συνάρτηση παραγωγής την

$$\widehat{A} = 2\sqrt{\hat{X}\hat{K}} \tag{1}$$

Ο καταναλωτής 1

- έχει μια μονάδα του αγαθού K.
- έχει προτιμήσεις της μορφής

$$u_1 = A_1.$$

Ο καταναλωτής 2

- έχει μια μονάδα του αγαθού X.
- έχει προτιμήσεις της μορφής

$$u_2 = \ln(A_2) + \ln(X_2).$$

Τα κέρδη της επιχείρησης μοιράζονται εξίσου στους δυο καταναλωτές.

Να υπολογιστεί η ανταγωνιστική ισορροπία.

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**</u>

1.ονομαζουμε τις τιμές των εμπορευμάτων

$$\boldsymbol{p} = \text{price of } \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{w} = \text{price of } \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{r} = \text{price of } \boldsymbol{K}$$

2.ορίζουμε τα εισοδήματα των καταναλωτών

$$\boldsymbol{M_1 = r + \frac{\Pi}{2}, M_2 = w + \frac{\Pi}{2}} \tag{2}$$

3.λυουμε τα προβλήματα μεγιστοποίησης των καταναλωτών.

Για τον καταναλωτή 1, το πρόβλημα

$$\boldsymbol{\max u_1 = A_1, \text{subject to } pA_1 + wX_1 + rK_1 \le M_1, A_1 \ge 0}$$

έχει λύση

$$\boxed{\boldsymbol{A_1 = \frac{r + \frac{\Pi}{2}}{p}, X_1 = 0, K_1 = 0}} \tag{3}$$

Για τον καταναλωτή 2, το πρόβλημα

$$\boldsymbol{\max u_2 = \ln(A_2) + \ln(X_2), \text{subject to } pA_2 + wX_2 + rK_2 \le M_2, A_2 \ge 0, X_2 \ge 0}$$

έχει λύση

$$\boxed{\boldsymbol{A_2 = \frac{w + \frac{\Pi}{2}}{2p}, X_2 = \frac{w + \frac{\Pi}{2}}{2w}, K_2 = 0}} \tag{4}$$

4.Λυουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της επιχειρησης.Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi = p\hat{A} - r\hat{K} - w\hat{X} \qquad (5)$$

Η επιχείρηση λύνει το πρόβλημα

$$\underbrace{\max}_{\hat{K},\hat{X}} \Pi = p\hat{A} - r\hat{K} - w\hat{X} = 2p\sqrt{\hat{K}\hat{X}} - r\hat{K} - w\hat{X}$$

Η συνάρτηση κέρδους Π είναι κοιλη,αρα κάθε λύση των συνθηκών πρώτης τάξεως είναι και ολικό μεγιστο.Οι συνθήκες πρώτης τάξεως

$$\begin{aligned} & p\frac{\sqrt{\hat{X}}}{\sqrt{\hat{K}}} \le r, \left(p\frac{\sqrt{\hat{X}}}{\sqrt{\hat{K}}} - r \right)\hat{K} = 0 \\ & p\frac{\sqrt{\hat{K}}}{\sqrt{\hat{X}}} \le w, \left(p\frac{\sqrt{\hat{K}}}{\sqrt{\hat{X}}} - w \right)\hat{X} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

αποκλείουν τις περιπτώσεις $\hat{K} > 0, \hat{X} = 0$ και $\hat{K} = 0, \hat{X} > 0$,και δείχνουν ότι η περίπτωση $\hat{K} > 0, \hat{X} > 0$ θα είναι ολικό μέγιστο εάν και μόνο εάν

$$p^2 = wr, \hat{X} = \frac{r}{w}\hat{K} \qquad (7)$$

Η συνθήκη $p^2 = wr$ είναι επί των παραμετρων,αρα θα πρέπει να εξετάσουμε τις συμβαίνει όταν $p^2 \neq wr$.Από την προηγούμενη ανάλυση ξέρουμε ότι είτε η λύση θα είναι $\hat{K} = 0, \hat{X} = 0$,είτε δεν θα υπάρχει λυση.Για να το αποφασίσουμε αυτό,γραφουμε τη συνάρτηση κέρδους ως εξής

$$\Pi(\hat{K},\hat{X}) = \hat{X}\left(2p\sqrt{\frac{\hat{K}}{\hat{X}}} - r\frac{\hat{K}}{\hat{X}} - w\right).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση στην παρένθεση εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y = \frac{\hat{K}}{\hat{X}}$,και γράφουμε $\Pi(y,\hat{X}) = \hat{X}(2p\sqrt{y} - ry - w) = \hat{X}g(y)$.Παρατηρούμε ότι η Π μπορεί να πάρει θετικές τιμές μόνο όταν η $g(y)$ μπορεί να πάρει θετικές τιμες.Η $g(y)$ είναι κοίλη συνάρτηση που μεγιστοποιείται στο σημείο όπου $g'(y) = 0$,δηλαδή στο σημείο $y = \frac{p^2}{r^2}$,και άρα η μέγιστη τιμή της $g(y)$ είναι $g(\frac{p^2}{r^2}) = \frac{p^2}{r} - w$.Άρα το πρόβλημα της επιχείρησης δεν έχει λύση όταν $p^2 > wr$,και έχει την λύση $\hat{K} = 0, \hat{X} = 0$ όταν $p^2 < wr$.Συνοψιζοντας,η συμπεριφορά της επιχείρησης περιγράφεται από

$$\boxed{(\hat{K},\hat{X},\hat{A},\Pi) = \begin{cases} (0,0,0,0) & \text{if} \quad p^2 < wr \\ \left(\hat{K}, \frac{r}{w}\hat{K}, 2\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{w}}\hat{K}, 0\right) & \text{if} \quad p^2 = wr \\ (\infty,\infty,\infty) & \text{if} \quad p^2 > wr \end{cases}} \qquad (8)$$

5.γραφουμε τις συνθήκες ισορροπίας

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{A} = A_1 + A_2\\&1 = \hat{X} + X_1 + X_2\\&1 = \hat{K} + K_1 + K_2\end{aligned}} \tag{9}$$

λύνουμε ταυτόχρονα τις (3),(4),(8),(9) και βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{p}{r} = \sqrt{2}, \frac{w}{r} = 2\\&(\hat{K}, \hat{X}, \hat{A}, \Pi) = (1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0)\\&A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, X_1 = 0, K_1 = 0\\&A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, X_2 = \frac{1}{2}, K_2 = 0\end{aligned}} \tag{10}$$