Να επιλυθει το ακολουθο προβλημα ελαχιστοποιησης

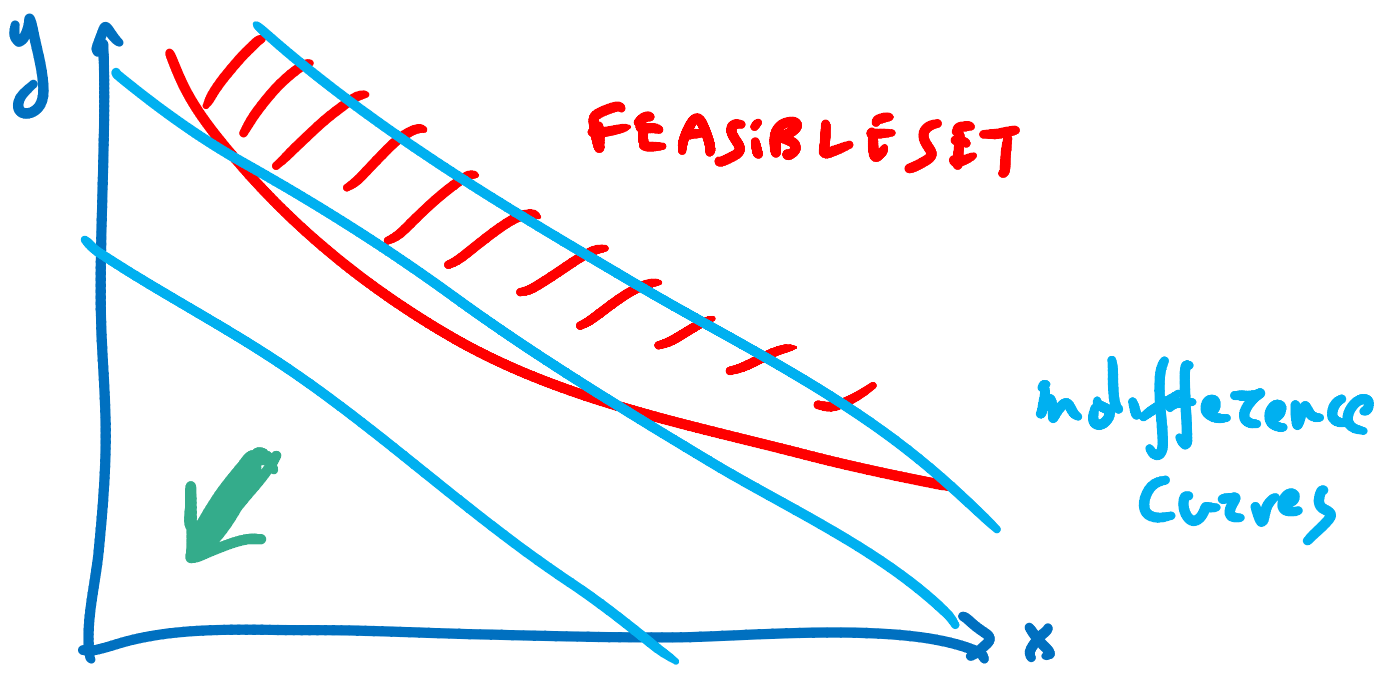
$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ x+y \\ \text{subject to} \\ 2\sqrt{x+\varepsilon}+4y\geq q \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{array}}$$

για ολες τις τιμες των θετικων παραμετρων $\varepsilon>0, q>0$**.**

Φερνουμε το προβλημα σε κανονικη μορφη

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ -x-y \\ \text{subject to} \\ 2\sqrt{x+\varepsilon}+4y-q\geq 0 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{array}}$$

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται.Το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο,διοτι περιλαμβανει την αποκλινουσα στο απειρο ακολουθια $(x_n, y_n)=\left(n, n\frac{q}{4}\right), n=1,2,..$
- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται.Η συναρτηση στοχου ειναι κοιλη ως γραμμικη,και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο διοτι ειναι το υπερτερο συνολο της κοιλης συναρτησης $2\sqrt{x+\varepsilon}+4y-q$



- Η λαγρανζιανη $L=\mu\left(-x-y\right)+\lambda\left(2\sqrt{x+\varepsilon}+4y-q\right)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\mu+\frac{\lambda}{\sqrt{x+\varepsilon}}\leq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}x=\left(-\mu+\frac{\lambda}{\sqrt{x+\varepsilon}}\right)x=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-\mu+4\lambda\leq 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}y=\left(-\mu+4\lambda\right)y=0 \tag{4}$$

$$2\sqrt{x+\varepsilon}+4y-q\geq 0 \tag{5}$$

$$\lambda\left(2\sqrt{x+\varepsilon}+4y-q\right)=0 \tag{6}$$

$$x,y,\lambda\geq 0,\mu\in\left\{0,1\right\},\mu=0\ \Rightarrow\ \lambda>0,\lambda=0\Rightarrow\mu>0 \tag{7}$$

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΛΥΣΕΩΝ

Υπόθεση $x>0$, $y>0$

Λύση Από τις (2), (4) $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x+\epsilon}} = \mu = 4\lambda$

Αν $\lambda=0$ τότε $\mu=0$, αντίφαση στην (7), άρα $\lambda>0$, $\mu=1$. Τότε η (6) δίνει $2\sqrt{x+\epsilon}+4y=g$. Άρα έχουμε

$$\mu=1,\quad \lambda=\frac{1}{4},\quad x=\frac{1}{16}-\epsilon,\quad y=\frac{g}{4}-\frac{1}{8}$$

Έλεγχος Οι ανισότητες $x>0$, $y>0$ απαιτούν $\epsilon<\frac{1}{16}$, $g>\frac{1}{2}$

Υπό αυτές τις συνθήκες έχουμε βρει μια λύση των αναγκαίων συνθηκών. Επειδή ισχύουν οι ικανές συνθήκες, αυτή η λύση είναι και ολικό μέγιστο.

$$(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{1}{16}-\epsilon,\ \frac{g}{4}-\frac{1}{8}\right) & \text{εάν } \epsilon<\frac{1}{16} \text{ και } g>\frac{1}{2}\\ ? & \end{cases}$$

Συνεχίζουμε την αναζήτηση έως ότου εξαντλήσουμε τον παραμετρικό χώρο

Υπόθεση $x=0$, $y=0$

Λύση $\dfrac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}\le\mu$, $4\lambda\le\mu$, $2\sqrt{\epsilon}\ge g$

Αν $\mu=0$ τότε $\lambda=0$, αντίφαση στην 7. Άρα $\mu=1$, $\lambda\le\frac{1}{4}$, $\lambda\le\sqrt{\epsilon}$
$\lambda=0$ επειδή ο περιορισμός ισχύει με >0.

Ελεγχος Πρεπει να ικανοποιειται η συνθηκη επι των παραμετρων $2\sqrt{\epsilon} \geq g$. Αρα

$$(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{16} - \epsilon, \frac{g}{4} - \frac{1}{8}\right) & \text{εαν } \epsilon < \frac{1}{16} \text{ και } g > 1/2 \\ (0,0) & \text{εαν } g \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ ? & \end{cases}$$

Συνεχιζουμε την αναζητηση εως οτου εξαντλησουμε τον παραμετρικο χωρο

Υποθεση $x=0,\ y>0$

Λυση $\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \leq \mu,\quad \mu = 4\lambda$

$\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, αντιφαση, αρα $\mu = 1,\ \lambda = \frac{1}{4}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \quad 2\sqrt{\epsilon} + 4y = g$, αρα $y = \dfrac{g - 2\sqrt{\epsilon}}{4}$

Ελεγχος. $g \geq 2\sqrt{\epsilon},\quad \epsilon \geq \frac{1}{16}$

$$(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{16} - \epsilon, \frac{g}{4} - \frac{1}{8}\right) & \text{εαν } \epsilon < \frac{1}{16} \text{ και } g > 1/2 \\ (0,0) & \text{εαν } g \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ \left(0, \frac{g}{4} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\right) & \text{εαν } g > 2\sqrt{\epsilon},\ \epsilon \geq \frac{1}{16} \\ ? & \end{cases}$$

Συνεχιζουμε την αναζητηση εως οτου εξαντλησουμε τον παραμετρικο χωρο

Υπόθεση $x>0,\ y=0$

Λύση $\mu = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x+\epsilon}}, \quad \mu \geq 4\lambda$

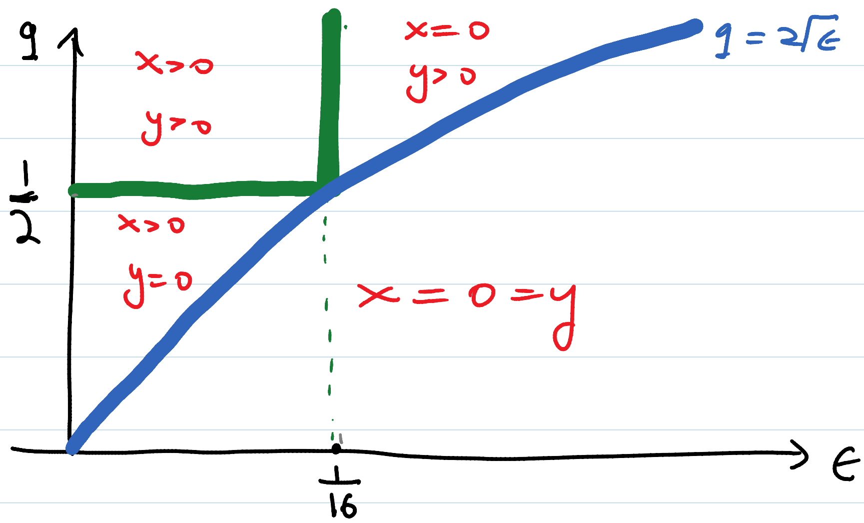
Άρα $\mu = 1$, $\lambda = \sqrt{x+\epsilon} > 0$, $\lambda \leq \frac{1}{4}$. Άρα $2\sqrt{x+\epsilon} = g$, οπότε

$$x = \frac{g^2}{4} - \epsilon, \quad g \leq \frac{1}{2}.$$

Έλεγχος $g > 2\sqrt{\epsilon}$, $g \leq 1/2$, άρα $\epsilon < \frac{1}{16}$

$$(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{16} - \epsilon,\ \frac{g}{4} - \frac{1}{8}\right) & \text{εάν } \epsilon < \frac{1}{16} \text{ και } \frac{1}{2} < g \\ (0,0) & \text{εάν } g \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ \left(0,\ \frac{g}{4} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\right) & \text{εάν } 2\sqrt{\epsilon} < g,\ \frac{1}{16} \leq \epsilon \\ \left(\frac{g^2}{4} - \epsilon,\ 0\right) & \text{εάν } 2\sqrt{\epsilon} < g \leq \frac{1}{2},\ \epsilon < \frac{1}{16} \end{cases}$$

ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΧΩΡΟ



Με κόκκινο η μορφή της λύσης σε κάθε υπόχωρο