Να υπολογιστούν ,για όλες  τις τιμές των παραμέτρων, τα διανυσματικά μέγιστα(άριστα κατά παρετο σημεία) του ακολούθου προβλήματος

## συνάρτηση στόχου

$$f(A_1, A_2, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 2\log A_1 + 3\log A_2 \\ B_1 + B_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

## Εφικτό σύνολο

$$S = \{(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{R}_+^4 : A_1 + B_1 \le \theta_1, A_2 + B_2 \le \theta_2\} \tag{2}$$

## Μεταβλητές $A_1, A_2, B_1, B_2$

## Παράμετροι $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$

# Απάντηση

1.Ορίζουμε το βοηθητικό πρόβλημα μεγιστοποίησης για τον στόχο 1

$$\begin{aligned}
&\max\ 2\log A_1 + 3\log A_2 \\
&\text{subject to} \\
&B_1 + B_2 \ge \beta \\
&A_1 + B_1 \le \theta_1 \\
&A_2 + B_2 \le \theta_2 \\
&A_1 \ge 0, B_1 \ge 0, A_2 \ge 0, B_2 \ge 0 \\
&\text{variables:} A_1, B_1, A_2, B_2 \\
&\text{parameters:} \beta \in \mathbb{R}, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0
\end{aligned} \tag{3}$$

2.λυνουμε το (3) για όλες τις τιμές των παραμέτρων $\beta \in \mathbb{R}, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$

Εκφράζουμε την λύση, για συντομία, μέσω του διανύσματος

$$\Psi = \left( \frac{2\left(\theta_1 + \theta_2 - \beta\right)}{5}, \frac{3\left(\theta_1 + \theta_2 - \beta\right)}{5}, \frac{3\theta_1 - 2\theta_2 + 2\beta}{5}, \frac{-3\theta_1 + 2\theta_2 + 3\beta}{5} \right) \quad (4)$$

$$\left(A_1, A_2, B_1, B_2\right) = \begin{cases} (\theta_1, \theta_2, 0, 0) & \text{if} \quad \beta \le 0 \\ (\theta_1 - \beta, \theta_2, \beta, 0) & \text{if} \quad 0 \le \beta \le \theta_1 - 2\theta_2/3 \\ (\theta_1, \theta_2 - \beta, 0, \beta) & \text{if} \quad 0 \le \beta \le \theta_2 - 3\theta_1/2 \\ \text{no solution} & \text{if} \quad \beta > \theta_1 + \theta_2 \\ \Psi & \text{if} \quad \beta \ge \theta_1 - 2\theta_2/3 \text{ and } \beta \ge \theta_2 - 3\theta_1/2 \text{ and } \beta \le \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις είναι μοναδικές, άρα δεν χρειάζεται να λύσουμε το βοηθητικό πρόβλημα για τον στόχο 2.

3.απλοποιηση της λύσης ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων

case $\theta_1 \le 2\theta_2/3$

$$\left(A_1, A_2, B_1, B_2\right) = \begin{cases} (\theta_1, \theta_2, 0, 0) & \text{if} \quad \beta \le 0 \\ (\theta_1, \theta_2 - \beta, 0, \beta) & \text{if} \quad 0 \le \beta \le \theta_2 - 3\theta_1/2 \\ \text{no solution} & \text{if} \quad \beta > \theta_1 + \theta_2 \\ \Psi & \text{if} \quad \beta \ge \theta_2 - 3\theta_1/2 \text{ and } \beta \le \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (6)$$

case $\theta_1 \ge 2\theta_2/3$

$$\left(A_1, A_2, B_1, B_2\right) = \begin{cases} (\theta_1, \theta_2, 0, 0) & \text{if} \quad \beta \le 0 \\ (\theta_1 - \beta, \theta_2, \beta, 0) & \text{if} \quad 0 \le \beta \le \theta_1 - 2\theta_2/3 \\ \text{no solution} & \text{if} \quad \beta > \theta_1 + \theta_2 \\ \Psi & \text{if} \quad \beta \ge \theta_1 - 2\theta_2/3 \text{ and } \beta \le \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (7)$$

4. απαλοιφή της βοηθητικής παραμέτρου $\beta$

Pareto optimal points when $\theta_1 \le 2\theta_2/3$

$$\left(A_1, A_2, B_1, B_2\right) = \begin{cases} (\theta_1, \theta_2 - B_2, 0, B_2) & \text{if} \quad 0 \le B_2 \le \theta_2 - 3\theta_1/2 \\ \left( -\frac{2B_2}{3} + \frac{2\theta_2}{3}, \theta_2 - B_2, \frac{2B_2}{3} - \frac{2\theta_2}{3} + \theta_1, B_2 \right) & \text{if} \quad \theta_2 - 3\theta_1/2 \le B_2 \le \theta_2 \end{cases} \quad (8)$$

Pareto optimal points when $\theta_1 \geq 2\theta_2/3$

$$(A_1, A_2, B_1, B_2) = \begin{cases} (\theta_1 - B_1, \theta_2, B_1, 0) & \text{if} \quad 0 \leq B_1 \leq \theta_1 - 2\theta_2/3 \\ \left(\theta_1 - B_1, \frac{3\theta_1}{2} - \frac{3B_1}{2}, B_1, \theta_2 + \frac{3B_1}{2} - \frac{3\theta_1}{2}\right) & \text{if} \quad \theta_1 - 2\theta_2/3 \leq B_1 \leq \theta_1 \end{cases} \tag{9}$$