inclass2015

Tuesday, 3 March, 2015 11:41

ΝΑ ΛΥΘΕΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

max $u_1 = \alpha A_1 B_1 + (1-\alpha)(A_2 + B_2)$

$A_1 + A_2 \le 1, B_1 + B_2 \le 1, A_1 \ge 0, A_2 \ge 0, B_1 \ge 0, B_2 \ge 0$

μεταβλητες A_1, A_2, B_1, B_2

παραμετροι $0 < \alpha < 1$

Οι περιορισμοί $A_i + B_i \le 1$ $i = 1,2$ θα ισχύουν με ισότητα σε κάθε λύση του προβλήματος, άρα για $x = A_1$, $y = B_1$

$\max u = \alpha xy + (1-\alpha)(2 - x - y)$ | VARIABLES x, y

$1-x \ge 0$, $1-y \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ | PARAMETERS $0 < \alpha < 1$

• Η u δεν είναι οιονεί κοίλη διότι για τα σημεία

$A = (0,0) \quad B = \left(\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}, \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)$ ισχυει

$u(A) = u(B) = 2(1-\alpha)$

Ενω για τον κυρτο συνδυασμο τους

$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ ισχυει

$$u\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) = u\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

$$= 2(1-\alpha) - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}$$

$$< 2(1-\alpha) = u(A) = u(B)$$

- Υπαρχει ολικο μεγιστο (Weierstrass)

Αρα θα πρεπει να βρουμε ολες τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων και να επιλεξουμε την καλυτερη

$$L = \lambda_0 u + \lambda_1 (1-x) + \lambda_2 (1-y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 \alpha y - \lambda_0 (1-\alpha) - \lambda_1 \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 \alpha x - \lambda_0 (1-\alpha) - \lambda_2 \leq 0 \quad (2)$$

$\boxed{\text{Υποθεση: } \lambda_0 = 0}$

Λυση: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ με τουλαχιστον ενα θετικο

Έστω ότι $\lambda_1 > 0$. Τότε η (1) δίνει $x = 0$, ενώ η $\lambda_1(1-x) = 0$ δίνει $x = 1$, αντίφαση. Άρα

$\lambda_0 = 1$ σε κάθε λύση των αναγκαίων

$\boxed{\text{Υπόθεση: } \lambda_0 = 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1}$

Λύση:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha y - (1-\alpha) - \lambda_1 = 0 \qquad y = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha x - (1-\alpha) - \lambda_2 = 0 \qquad x = \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad (3)$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \qquad u = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 + 2(1-\alpha)\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Έλεγχος: $x < 1 \iff 1/2 < \alpha < 1$

$\boxed{\text{Υπόθεση: } \lambda_0 = 1,\ x = 0,\ y = 0}$

Λύση: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(1-\alpha) < 0 \qquad x = 0 = y \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -(1-\alpha) < 0 \qquad u = 2(1-\alpha)$$

Έλεγχος: OK

$\boxed{\text{Υπόθεση: } x = 1,\ y = 1,\ \lambda_0 = 1}$

Λύση

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha - (1-\alpha) - \lambda_1 = 0 \qquad x = y = 1 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha - (1-\alpha) - \lambda_2 = 0 \qquad u = \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha - (1-\alpha) - \lambda_2 = 0$$

$u = \alpha$

Ελεγχος: ΟΚ $\left(\lambda_i = \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0 \right)$

$\boxed{\text{Υποθεση: } \lambda_0 = 1, \ x = 1, \ y = 0}$

Λυση
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(1-\alpha) - \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha - (1-\alpha) - \lambda_2 \leq 0$$
$$\lambda_2 = 0$$

Ελεγχος: $\lambda_1 = -(1-\alpha) < 0$ αντιφαση.

$\boxed{\text{Υποθεση: } \lambda_0 = 1, \ x = 1, \ 0 < y < 1}$

Λυση
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha y - (1-\alpha) - \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha - (1-\alpha) - \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2 = 0.$$

Ελεγχος: $\alpha = 1/2$, $\lambda_1 = \frac{y-1}{2} < 0$ αντιφαση

$\boxed{\text{Υποθεση: } \lambda_0 = 1, \ x = 0, \ 0 < y < 1}$

Λυση: ∂L ...

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha y - (1-\alpha) - \lambda_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \qquad - (1-\alpha) - \lambda_y = 0$$

$$\lambda_y = 0$$

$\alpha = 1$ αντίφαση

Συγκρίναμε τις (3) (4) (5) και επιλέγουμε την καλύτερη

Παρατηρούμε ότι η (5) είναι πάντα καλύτερη από την (3), διότι,

$$\alpha > \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 + 2(1-\alpha)\left(2-\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \forall \alpha$$

Άρα η σύγκριση είναι μεταξύ της (4) και (5)

$$\alpha > 2 - 2\alpha \iff \alpha > 2/3. \qquad \text{Άρα}$$

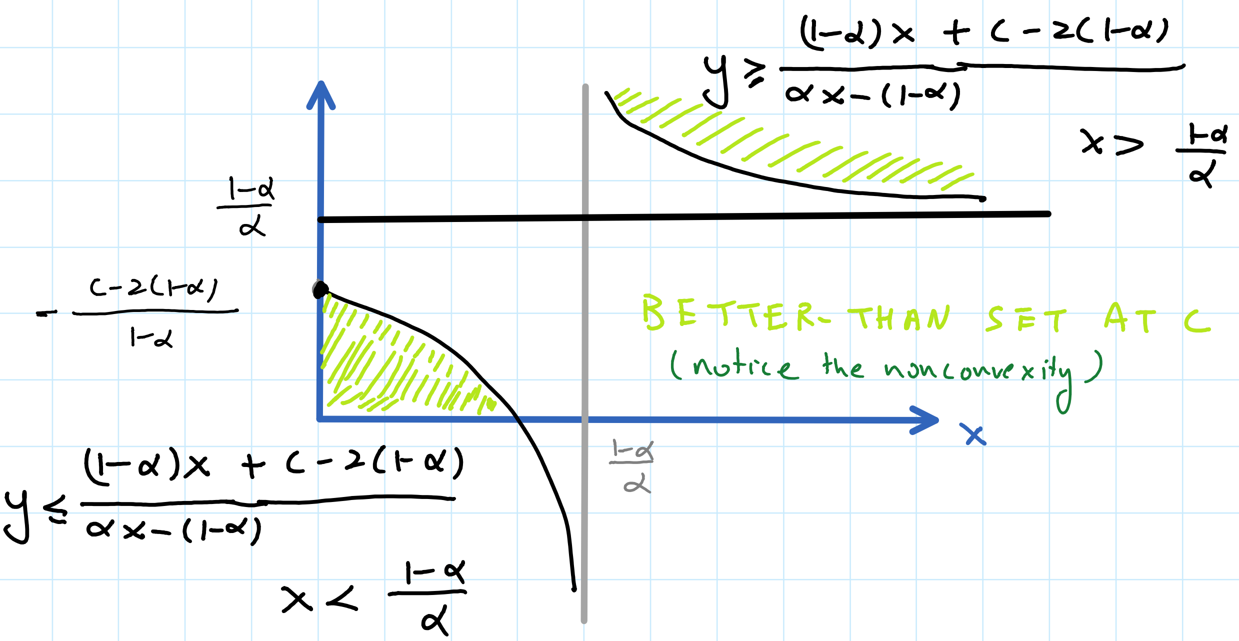
$$\boxed{(x,y) = \begin{cases} (0,0) & \text{εάν } 0 < \alpha < 2/3 \\ (0,0) \text{ και } (1,1) & \text{εάν } \alpha = \frac{2}{3} \\ (1,1) & \text{εάν } \frac{2}{3} < \alpha < 1 \end{cases}}$$

ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

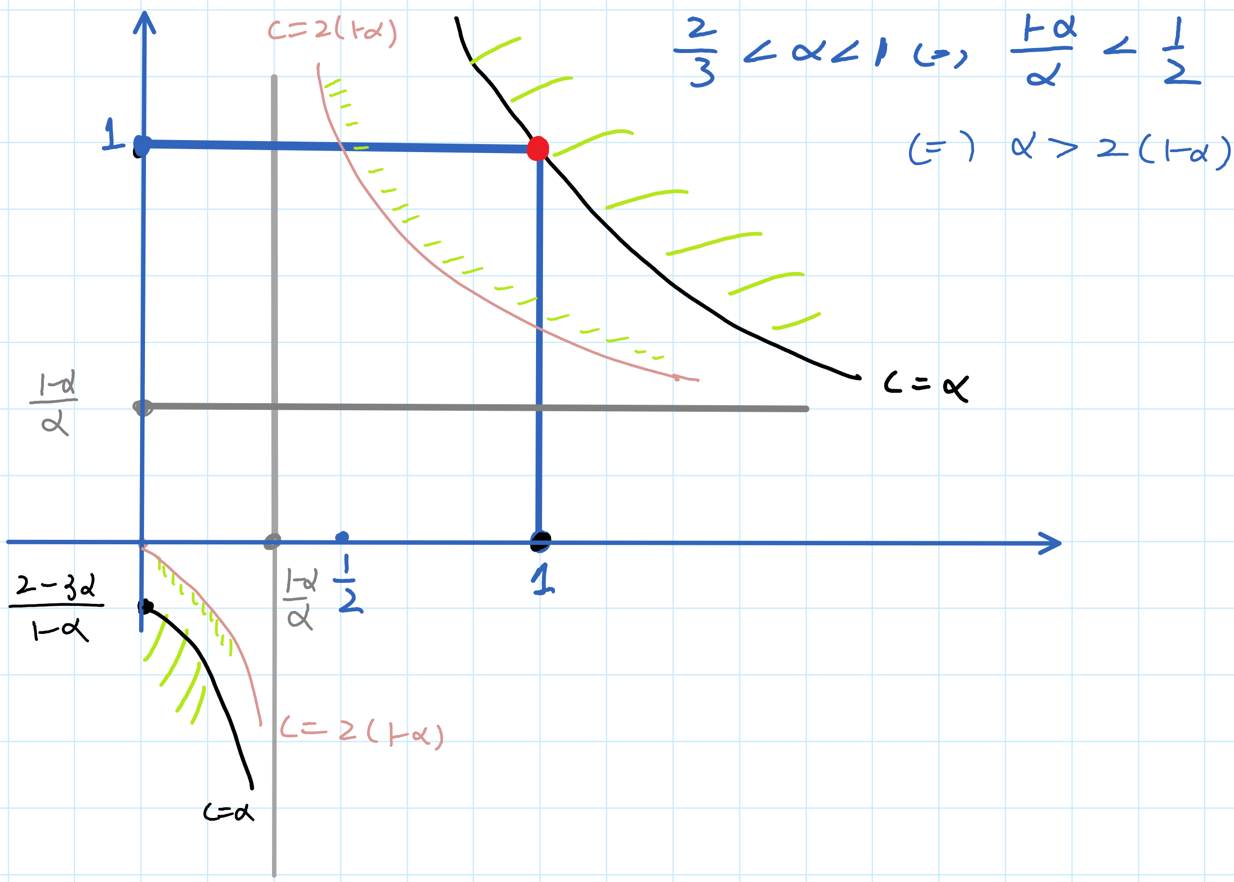
Τα υπερτερα σύνολα της u,

$$B_c^u = \{(x,y) : u(x,y) \geq c\}$$

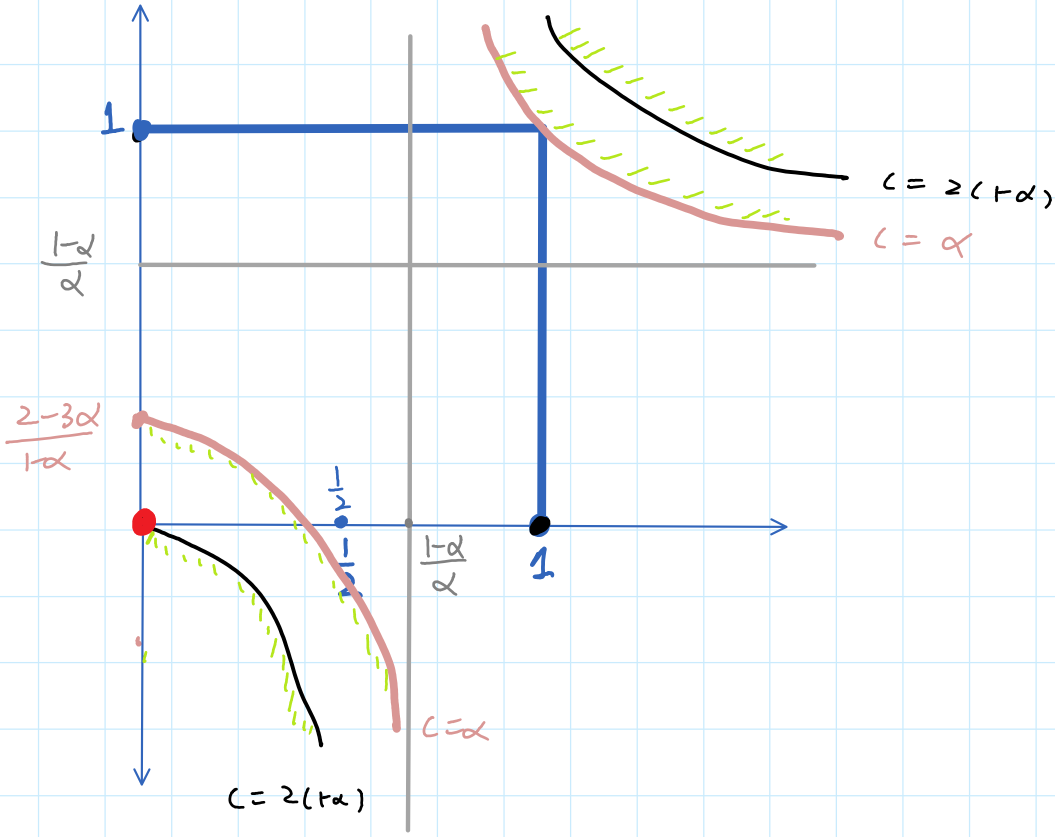
Έχουν το ακόλουθο σχήμα



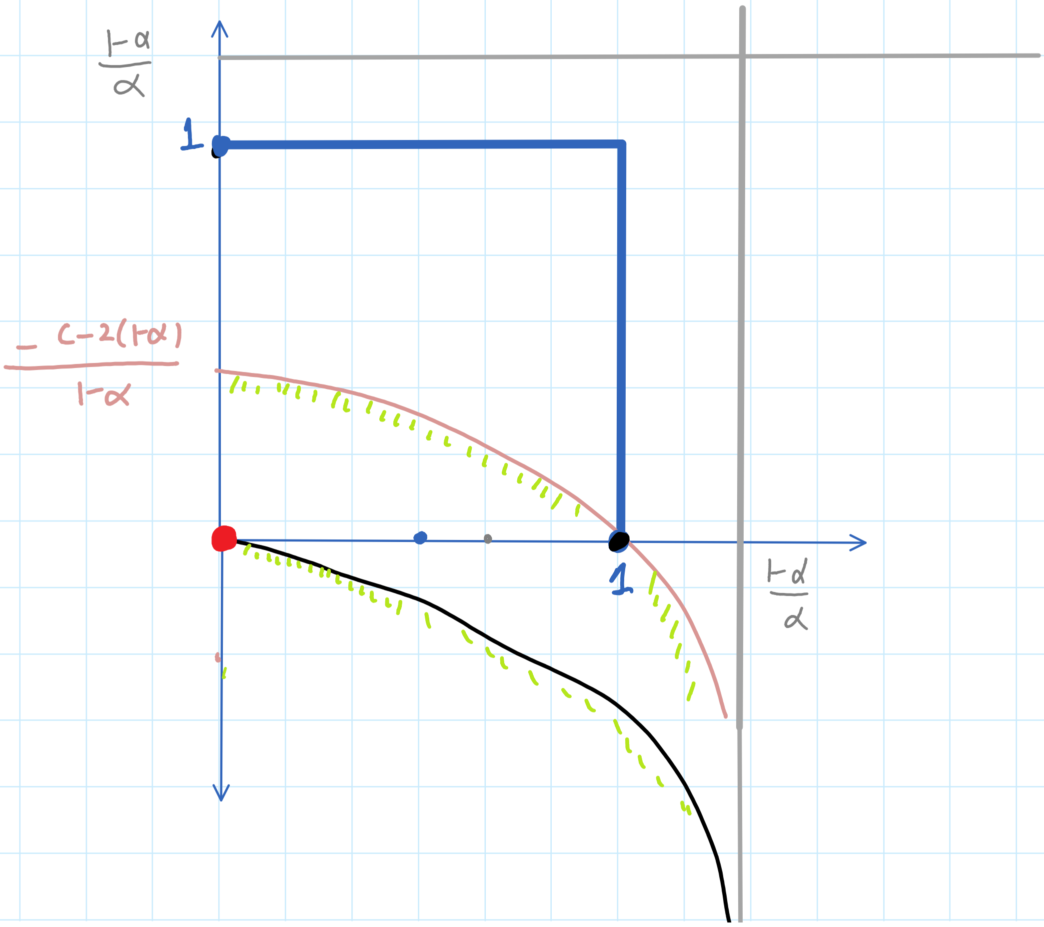
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

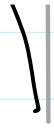


$\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1-\alpha}{\alpha} < 1, \quad \alpha < 2(1-\alpha)$



$$0 < \alpha < 1/2 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} > 1 \ , \ \alpha < 2(1-\alpha)$$





$c \simeq 2(1+\alpha)$