Θεωρουμε οικονομια με

•ενα καταναλωτη

•δυο επιχειρησεις,τις 1 και 2

•τρια αγαθα ,τα A, X, K

•Ο καταναλωτης εχει μια μοναδα του αγαθου Κ,και τεσσερεις μοναδες του αγαθου Χ.

•Οι προτιμησεις του καταναλωτη Α περιγραφονται απο την συναρτηση οφελους $U = \log A + \log X + \log K$

•Η επιχειρηση 1 μπορει να παραγει το αγαθο Α απο το αγαθο Χ με συναρτηση παραγωγης $A_1 = X_1$

• Η επιχειρηση 2 μπορει να παραγει το αγαθο Α απο τα αγαθο Κ με συναρτηση παραγωγης $A_2 = tK_2$

Να υπολογιστει η ανταγωνιστικη ισορροπια για ολες τις τιμες της θετικης παραμετρου t

ΛΥΣΗ

1.ονομαζουμε τις τιμές των εμπορευμάτων

$$p = \text{price of } A$$
$$w = \text{price of } X$$
$$r = \text{price of } K$$

Τυποποιουμε(προαιρετικα) βαζοντας $p = 1$

2.οριζουμε το εισοδήμα του καταναλωτη

$$M = r + 4w \tag{1}$$

3.λυνουμε το προβλήμα μεγιστοποίησης του καταναλωτη

$$\max U = \log A + \log X + \log K$$
$$\text{subject to } A + wX + rK \le M$$

Βρισκουμε οτι

$$\boxed{A=\frac{M}{3}, X=\frac{M}{3w}, K=\frac{M}{3r}} \tag{2}$$

4.Λυνουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της επιχειρησης 1.Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi_1 = A_1 - wX_1 \tag{3}$$

Η επιχείρηση λύνει το πρόβλημα

$$\underbrace{\max}_{A_1,X_1} \Pi_1 = A_1 - wX_1, \text{subject to } A_1 = X_1 \geq 0$$

$$\boxed{(A_1,X_1)=\begin{cases}(0,0) & \text{if} \quad w>1\\ (X_1,X_1) & \text{if} \quad w=1\\ (\infty,\infty) & \text{if} \quad w<1\end{cases}} \tag{4}$$

5.Λυνουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της επιχειρησης 2.Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi_2 = A_2 - rK_2, \text{subject to } A_2 = tK_2 \geq 0 \tag{5}$$

Η επιχείρηση λύνει το πρόβλημα

$$\underbrace{\max}_{A_2,K_2} \Pi_2 = A_2 - rK_2, \text{subject to } A_2 = tK_2 \geq 0$$

$$\boxed{(A_2,K_2)=\begin{cases}(0,0) & \text{if} \quad r>t\\ (K_2,K_2) & \text{if} \quad r=t\\ (\infty,\infty) & \text{if} \quad r<t\end{cases}} \tag{6}$$

5.γραφουμε τις συνθήκες ισορροπίας

$$\boxed{\begin{aligned}&A = A_1 + A_2 = X_1 + tK_2\\ &4 = X + X_1\\ &1 = K + K_2\end{aligned}} \tag{7}$$

6.Αρχιζουμε τη διαδικασια αναζητησης λυσεων με την περιπτωση $X_1 > 0, K_2 > 0$

Απο τις (4),(6) εχουμε οτι $r = t, w = 1$.Με αντικατασταση αυτων των τιμων στις (1),(2) προκυπτει οτι $M = t+4, A = \frac{t+4}{3}, X = \frac{t+4}{3}, K = \frac{t+4}{3t}$.Με αντικατασταση στην (7)

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{t+4}{3}=X_1+tK_2\\ 4=\dfrac{t+4}{3}+X_1\\ 1=\dfrac{t+4}{3t}+K_2\end{array}}$$

Η λυση ειναι $X_1=\dfrac{8-t}{3}, K_2=\dfrac{2t-4}{3t}$.Αρα

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{2\le t\le 8|}\\ w=1, r=t\\ A_1=X_1=\dfrac{8-t}{3}, K_2=\dfrac{2t-4}{3t}, A_2=\dfrac{2t-4}{3}\\ A=\dfrac{t+4}{3}, X=\dfrac{t+4}{3}, K=\dfrac{t+4}{3t}\end{array}} \quad (8)$$

Συνεχιζουμε την αναζητηση λυσεων για την περιπτωση που $t<2$.Δοκιμαζουμε την περιπτωση $K_2=0, X_1>0$.Με τον ιδιο τροπο βρισκουμε οτι

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{t<2|}\\ w=1, r=2\\ A_1=X_1=2, K_2=A_2=0\\ A=2, X=2, K=1\end{array}} \quad (9)$$

Ολες οι αλλες περιπτωσεις καταληγουν σε αντιφαση.

Συνεχιζουμε την αναζητηση λυσεων για την περιπτωση που $t>8$.Δοκιμαζουμε την περιπτωση $K_2>0, X_1=0$.Με τον ιδιο τροπο βρισκουμε οτι

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{t>8|}\\ w=\dfrac{t}{8}, r=t\\ A_1=X_1=0, K_2=K=\dfrac{1}{2}, A_2=A=\dfrac{t}{2}\\ X=4\end{array}} \quad (10)$$

Ολες οι αλλες περιπτωσεις καταληγουν σε αντιφαση.