ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

●*ενας καταναλωτης*

●*αγαθα* A,B,L,K

●*Δυο επιχειρησεις*

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ 1 *παραγει το αγαθο* A *απο τα αγαθα* K, L *με συναρτηση παραγωγης*

$$\hat{A} = \min\{K_A, 2L_A\} \tag{1}$$

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ 2 *παραγει το αγαθο* B *απο τα αγαθα* K, L *με συναρτηση παραγωγης*

$$\hat{B} = \min\{K_B, L_B\} \tag{2}$$

Ο ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ

●*ειναι ο μοναδικος ιδιοκτητης των επιχειρησεων.*

●*Εχει* $\overline{L}$ *μοναδες του αγαθου* L, $\overline{K}$ *μοναδες του αγαθου* K

●*Οι προτιμησεις του περιγραφονται απο την*

$$U = \alpha \log A + (1-\alpha)\log B \tag{3}$$

Ολες οι παραμετροι ειναι θετικες,και επιπλεον

$$\boxed{0 < \alpha < 1, \frac{2}{2-\alpha} < \frac{\overline{K}}{\overline{L}} < 1+\alpha} \tag{4}$$

1.Να υπολογιστει η ανταγωνιστικη ισορροπια

2.<u>Stolper-Samuelson</u> Να ευρεθει η επιδραση μιας μικρης αυξησης της παραμετρου α *στον λογο*

$$\frac{\text{τιμη του αγαθου K}}{\text{τιμη του αγαθου L}}$$

3.<u>Rybsczynski</u> Να ευρεθει η επιδραση μιας μικρης αυξησης της παραμετρου $\overline{K}$ *στην παραγομενη ποσοτητα των αγαθων A,B*

<u>Σημειωση</u> μικρες αυξησεις θεωρουνται αυτες που διατηρουν την (8)

<u>Απαντησεις</u> *Η απαντηση του θεματος των εξετασεων εμπεριεχεται στο κειμενο που ακολουθει αν θεσουμε*

$$\alpha_K = 1, \alpha_L = 2, \beta_K = \beta_L = 1$$

2×2 *MODEL OF PRODUCTION*

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

●*ενας καταναλωτης*

●*αγαθα* A,B,L,K

●*Δυο επιχειρησεις*

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ 1 *παραγει το αγαθο* A *απο τα αγαθα* K,L *με συναρτηση παραγωγης*

$$\hat{A}=\min\{\alpha_K K_A,\alpha_L L_A\} \tag{5}$$

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ 2 *παραγει το αγαθο* B *απο τα αγαθα* K,L *με συναρτηση παραγωγης*

$$\hat{B}=\min\{\beta_K K_B,\beta_L L_B\} \tag{6}$$

Ο ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ

●*ειναι ο μοναδικος ιδιοκτητης των επιχειρησεων.*

●*Εχει* $\overline{L}$ *μοναδες του αγαθου* L, $\overline{K}$ *μοναδες του αγαθου* K

●*Οι προτιμησεις του περιγραφονται απο την*

$$U=\alpha\log A+\beta\log B \tag{7}$$

Θα χρησιμοποιησουμε τον εξης συμβολισμο $\theta_A=\dfrac{\alpha_L}{\alpha_K},\theta_B=\dfrac{\beta_L}{\beta_K},\sigma=\dfrac{\overline{K}}{\overline{L}}$

Ολες οι παραμετροι ειναι θετικες,και επιπλεον

$$\boxed{\alpha+\beta=1,\theta_A>\theta_B,\frac{\theta_A\theta_B}{\alpha\theta_B+\beta\theta_A}<\sigma<\alpha\theta_A+\beta\theta_B} \tag{8}$$

Οι υποθεσεις (8) συνεπαγονται οτι

$$\boxed{\theta_B<\frac{\theta_A\theta_B}{\alpha\theta_B+\beta\theta_A}<\sigma<\alpha\theta_A+\beta\theta_B<\theta_A} \tag{9}$$

<u>Σημειωση</u> η μεγιστοποιηση των κερδων θα οδηγησει τις επιχειρησεις να επιλεξουν $\frac{K_A}{L_A}=\theta_A, \frac{K_B}{L_B}=\theta_B$*.Η υποθεση* $\theta_A > \theta_B$ *σημαινει οτι στην παραγωγη του αγαθου Α χρησιμοποιειτα πιο εντατικα το κεφαλαιο απο οτι στην παραγωγη του αγαθουΒ.*

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

1.ονομαζω την τιμη του καθε αγαθου

p_A =price of A,,p_B=price of B,w=price of L,r=price of K

2.Οριζω το εισοδημα του καταναλωτη

$$M=\Pi_1+\Pi_2+w\bar{L}+r\bar{K} \tag{10}$$

3.λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης του καταναλωτη

$\max_{A,B} U=\alpha\log A+\beta\log B$ subject to $p_A A+p_B B\le M, A\ge 0, B\ge 0$

Οι λυσεις ειναι οι συναρτησεις προσφορας-ζητησης του καταναλωτη

$$(A,B)=(\alpha\frac{M}{p_A},\beta\frac{M}{p_B}) \tag{11}$$

5.λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης της επιχειρησης 1

$\max_{K_A,L_A} \Pi_1=p_A\hat{A}-wL_A-rK_A=p_A\min\{\alpha_K K_A,\alpha_L L_A\}-wL_A-rK_A$

$$L_A=\begin{cases} 0 & if \quad p_A<\frac{w}{\alpha_L}+\frac{r}{\alpha_K} \\ \ge 0 & if \quad p_A=\frac{w}{\alpha_L}+\frac{r}{\alpha_K} \\ \infty & if \quad p_A>\frac{w}{\alpha_L}+\frac{r}{\alpha_K} \end{cases} \tag{12}$$

$$K_A=\frac{\alpha_L}{\alpha_K}L_A, \hat{A}=\alpha_L L_A$$

6.λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης της επιχειρησης 2

$\max_{K_B,L_B} \Pi_2=p_B\hat{B}-wL_B-rK_B=p_B\min\{\beta_K K_B,\beta_L L_B\}-wL_B-rK_B$

$$L_B = \begin{cases} 0 & if \quad p_B < \dfrac{w}{\beta_L} + \dfrac{r}{\beta_K} \\ \geq 0 & if \quad p_B = \dfrac{w}{\beta_L} + \dfrac{r}{\beta_K} \\ \infty & if \quad p_B > \dfrac{w}{\beta_L} + \dfrac{r}{\beta_K} \end{cases} \tag{13}$$

$$K_B = \frac{\beta_L}{\beta_K} L_B, \hat{B} = \beta_L L_B$$

6.λυνω τις συνθηκες ισορροπιας

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{demand} & = & \text{supply} \\ A & = & \hat{A} \\ B & = & \hat{B} \\ K_A + K_B & = & \overline{K} \\ L_A + L_B & = & \overline{L} \end{array}} \tag{14}$$

Απο τις (14),(11),(10) συναγουμε οτι $\hat{A} > 0, \hat{B} > 0$,και αρα σε οποιαδηποτε ισορροπια

$$\begin{aligned} & p_A = \frac{w}{\alpha_L} + \frac{r}{\alpha_K}, p_B = \frac{w}{\beta_L} + \frac{r}{\beta_K} \\ & \Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, M = w\overline{L} + r\overline{K} \\ & (\alpha \frac{M}{p_A}, \beta \frac{M}{p_B}) = (\hat{A}, \hat{B}), K_A + K_B = \overline{K}, L_A + L_B = \overline{L} \\ & K_A = \frac{\alpha_L}{\alpha_K} L_A, \hat{A} = \alpha_L L_A, K_B = \frac{\beta_L}{\beta_K} L_B, \hat{B} = \beta_L L_B \end{aligned} \tag{15}$$

Η μοναδικη λυση του γραμμικου συστηματος (15) ειναι

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{competitive equilibrium} \\ L_A = \dfrac{\overline{L}(\sigma - \theta_B)}{\theta_A - \theta_B}, L_B = \dfrac{\overline{L}(\theta_A - \sigma)}{\theta_A - \theta_B} \\ \dfrac{r}{w} = \dfrac{\sigma - (\alpha\theta_A + \beta\theta_B)}{\theta_A\theta_B - \sigma(\alpha\theta_B + \beta\theta_A)} \end{array}} \tag{16}$$

Η λυση αυτη μπορει να βρεθει παρατηρωντας οτι το υποσυστημα του (15) που αποτελειται απο τις εξισωσεις

$$K_A + K_B = \overline{K}, L_A + L_B = \overline{L}$$
$$K_A = \frac{\alpha_L}{\alpha_K} L_A, K_B = \frac{\beta_L}{\beta_K} L_B \tag{17}$$

ειναι γραμμικο και δεν περιεχει τις τιμες .Το συστημα (17),με αντικαταστασεις,καταληγει στο γραμμικο συστημα δυο μεταβλητων

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_K} L_A + \frac{\beta_L}{\beta_K} L_B = \overline{K}$$
$$L_A + L_B = \overline{L} \tag{18}$$

Η μοναδικη λυση του (18) ειναι

$$L_A = \frac{\overline{L}(\sigma - \theta_B)}{\theta_A - \theta_B}, L_B = \frac{\overline{L}(\theta_A - \sigma)}{\theta_A - \theta_B} \tag{19}$$

Απο τις (19),(15) προκυπτει οτι

$$\alpha \frac{w\overline{K} + r\overline{L}}{\frac{w}{\alpha_L} + \frac{r}{\alpha_K}} = \alpha_L \frac{\overline{L}(\sigma - \theta_B)}{\theta_A - \theta_B}$$
$$\left(1 - \alpha\right) \frac{w\overline{K} + r\overline{L}}{\frac{w}{\beta_L} + \frac{r}{\beta_K}} = \beta_L \frac{\overline{L}(\theta_A - \sigma)}{\theta_A - \theta_B} \tag{20}$$

Το συστημα (20) μετατρεπεται στο γραμμικο συστημα

$$\alpha\left(w\overline{K} + r\overline{L}\right) = \alpha_L \frac{\overline{L}(\sigma - \theta_B)}{\theta_A - \theta_B}\left(\frac{w}{\alpha_L} + \frac{r}{\alpha_K}\right)$$
$$\left(1 - \alpha\right)\left(w\overline{K} + r\overline{L}\right) = \beta_L \frac{\overline{L}(\theta_A - \sigma)}{\theta_A - \theta_B}\left(\frac{w}{\beta_L} + \frac{r}{\beta_K}\right) \tag{21}$$

με αγνωστους τις τιμες w, r

Ξερουμε οτι εξ ορισμου $\theta_A = \frac{\alpha_L}{\alpha_K}, \theta_B = \frac{\beta_L}{\beta_K}, \sigma = \frac{\overline{K}}{\overline{L}}$

Αρα το συστημα (21) γραφεται

$$\alpha\left(w\sigma\bar{L}+r\bar{L}\right)=\theta_A\alpha_K\frac{\bar{L}(\sigma-\theta_B)}{\theta_A-\theta_B}\left(\frac{w}{\theta_A\alpha_K}+\frac{r}{\alpha_K}\right)=\frac{\bar{L}(\sigma-\theta_B)}{\theta_A-\theta_B}\left(w+r\theta_A\right)$$

(22)

$$\left(1-\alpha\right)\left(w\sigma\bar{L}+r\bar{L}\right)=\theta_B\beta_K\frac{\bar{L}(\theta_A-\sigma)}{\theta_A-\theta_B}\left(\frac{w}{\theta_B\beta_K}+\frac{r}{\beta_K}\right)=\frac{\bar{L}(\theta_A-\sigma)}{\theta_A-\theta_B}\left(w+r\theta_B\right)$$

Με διαιρεση των δυο εξισωσεων κατα μελη προκυπτει οτι

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}=\left(\frac{\sigma-\theta_B}{\theta_A-\sigma}\right)\left(\frac{1+\frac{r}{w}\theta_A}{1+\frac{r}{w}\theta_B}\right) \tag{23}$$

Η (23) εχει μοναδικη λυση την

$$\frac{r}{w}=\frac{\sigma-(\alpha\theta_A+\beta\theta_B)}{\theta_A\theta_B-\sigma(\alpha\theta_B+\beta\theta_A)} \tag{24}$$

Παρατηρουμε οτι ισχυουν

1 αποτελεσμα κατα <u>stolper-samuelson</u>:μια μικρη αυξηση του α (αρα και της ζητησης για το αγαθο Α) θα αυξησει την τιμη του συντελεστη Κ,ο οποιος απασχολειτα πιο εντατικα στην παραγωγη του Α,σε σχεση με την τιμη του L,το οποιο απασχολειται πιο εντατικα στην παραγωγη του Β

$$\frac{\partial(r/w)}{\partial\alpha}=\frac{(\theta_A-\theta_B)(\theta_A-\sigma)(\sigma-\theta_B)}{\left(\theta_A\theta_B-\sigma(\alpha\theta_B+\beta\theta_A)\right)^2}>0 \tag{25}$$

2. αποτελεσμα κατα <u>rybsczynski</u> : μια μικρη αυξηση του αποθεματος κεφαλαιου $\bar{K}$ θα αυξησει την παραγωγη του αγαθου Α (προιον εντασεως κεφαλαιου)και θα μειωσει την παραγωγη του αγαθου Β (προιον εντασεως εργασιας)

$$\frac{\partial L_A}{\partial\bar{K}}=\frac{1}{\theta_A-\theta_B}>0,\frac{\partial L_B}{\partial\bar{K}}=-\frac{1}{\theta_A-\theta_B}<0 \tag{26}$$