ΘΕΜΑ 1

Έστω δυο παίκτες A,B με συναρτήσεις στόχου και περιορισμους,αντιστοιχως

$$U(A,B) = -(A-\theta)^2, 0 \le A \le \alpha \qquad (1)$$

$$V(A,B) = B - A, 0 \le B \le \beta \qquad (2)$$

Ο παίκτης A επιλέγει την τιμή της μεταβλητής A η οποία επιλύει το πρόβλημα μεγιστοποίησης (1) .Τα $\alpha > 0, \theta > 0$ είναι παράμετροι.

Ο παίκτης B επιλέγει την τιμή της μεταβλητής B η οποία επιλύει το πρόβλημα μεγιστοποίησης (2). Το $\beta > 0$ είναι παράμετρος.

Να υπολογιστούν όλες οι τιμές των παραμέτρων α, β για τις οποίες οι επιλογές των παικτών είναι άριστες κατά pareto,δηλαδή επιλύουν το ακόλουθο πρόβλημα διανυσματικής μεγιστοποίησης

$$\begin{aligned} &\text{συναρτησεις στοχου } (U,V) \\ &\text{εφικτο συνολο } S = \{(A,B) \in \mathbb{R}^2 : A + B \le \alpha + \beta, A \ge 0, B \ge 0\} \end{aligned} \qquad (3)$$

Απάντηση

Οι άριστες επιλογές του κάθε παίκτη(οι λύσεις των προβλημάτων (1),(2)) είναι

$$\begin{aligned} &\bar{A} = \begin{cases} \theta & \text{if} \quad \theta \le \alpha \\ \alpha & \text{if} \quad \theta \ge \alpha \end{cases} \\ &\bar{B} = \beta \end{aligned} \qquad (4)$$

Περίπτωση $\theta < \alpha$.Οι επιλογές των παικτών $(\bar{A}, \bar{B}) = (\theta, \beta)$ **<u>δεν είναι άριστες κατά παρετο</u>**, διότι το σημείο $(A', B') = (\theta, \alpha + \beta - \theta)$ είναι

- εφικτό,
- ισοδύναμο με το $(\bar{A}, \bar{B})$ για τον παίκτη A

$$U(A', B') = 0 = U(\bar{A}, \bar{B})$$

και

- καλύτερο από το $(\bar{A}, \bar{B})$ για τον παίκτη B

$$V(A', B') = B' - A' = \alpha + \beta - 2\theta > \theta + \beta - 2\theta = \beta - \theta = V(\bar{A}, \bar{B})$$

Περίπτωση $\theta \geq \alpha$ **.**Οι επιλογές των παικτών $(\bar{A},\bar{B})=(\alpha,\beta)$ **<u>είναι άριστες κατά παρετο</u>**,διότι οποιοδήποτε εφικτό σημείο $(A,B)\neq(\bar{A},\bar{B})$ είναι χειρότερο για κάποιον από τους παίκτες

- σε οποιοδήποτε εφικτό σημείο (A,B) με $A<\alpha$ ισχύει ότι $U(A,B)=-(A-\theta)^2<-(\alpha-\theta)^2=U(\bar{A},\bar{B})$
- σε οποιοδήποτε εφικτό σημείο (A,B) με $A>\alpha$ ισχύει ότι $V(A,B)=B-A<B-\alpha\leq\alpha+\beta-A-\alpha=\beta-A<\beta-\alpha=V(\bar{A},\bar{B})$
- σε οποιοδήποτε εφικτό σημείο (A,B) με $A=\alpha, B\neq\beta$ ισχύει ότι $B\leq\alpha+\beta-A=\beta$,άρα $B<\beta$ και $V(A,B)=B-A=B-\alpha<\beta-\alpha=V(\bar{A},\bar{B})$

άρα οι επιλογές των παικτών είναι άριστες κατά pareto εάν και μόνο $\alpha\leq\theta$

ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $S\xrightarrow{f}R$ που είναι αυστηρά οιονει-κοιλη,δηλαδη συνάρτηση που ικανοποιεί

$$\forall(a\in S)\forall(b\in S)\forall t\left[f(a)\geq f(b),0<t<1,a\neq b\Rightarrow f(ta+(1-t)b)>f(b)\right] \quad (5)$$

Με αυτά τα δεδομενα,να δειχθεί ότι το πρόβλημα μεγιστοποίησης που ορίζεται από

- Συνάρτηση στόχου f
- Εφικτό σύνολο S

έχει το πολύ ένα ολικό μέγιστο

<u>απάντηση</u>

έστω, προς αντίφαση, ότι υπάρχουν περισσότερα από ένα ολικά μέγιστα. Επιλέγουμε οποιαδήποτε δυο από αυτά και τα συμβολίζουμε με $M1,M2$.Τότε

$$M1\in S, M2\in S, M1\neq M2, f(M1)=f(M2) \quad (6)$$

$$f(M1)=f(M2)\geq f(x),\forall x\in S \quad (7)$$

Από τις (5),(6) και την κυρτότητα του S συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}&f(\frac{1}{2}M1+\frac{1}{2}M2)>f(M1)=f(M2)\\&\frac{1}{2}M1+\frac{1}{2}M2\in S\end{aligned} \quad (8)$$

Οι (7),(8) αντιφάσκουν.

ΘΕΜΑ 3

Έστω κυρτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $S \xrightarrow{f} R$ που είναι ρητώς οιονει κοιλη,δηλαδη οιονει-κοίλη συνάρτηση η οποία επιπλέον ικανοποιεί την συνθήκη

$$\forall\left(a \in S\right)\forall\left(b \in S\right)\forall t\left[f(a) > f(b), 0 < t \leq 1 \Rightarrow f(ta+(1-t)b) > f(b)\right] \qquad (9)$$

Με αυτά τα δεδομενα,να δειχθεί ότι στο πρόβλημα μεγιστοποίησης που ορίζεται από

- Συνάρτηση στόχου f
- Εφικτό σύνολο S

κάθε τοπικό μέγιστο είναι και ολικό μέγιστο

<u>απάντηση</u>

Έστω, προς αντίφαση, ότι υπάρχει τοπικό μέγιστο $m \in S$ που δεν είναι ολικό μέγιστο. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} & f(m) \geq f(x), \forall x \in S \cap B\left(m,\alpha\right) \\ & B\left(m,\alpha\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|x-m\right| < \alpha\right\} \end{aligned} \qquad (10)$$

και επίσης υπάρχει $M \in S$ τέτοιο ώστε

$$f(M) > f(m) \qquad (11)$$

Από την κυρτότητα του S και τον ορισμό του συνόλου $B\left(m,\alpha\right)$

$$tM + (1-t)m \in S \cap B\left(m,\alpha\right), \forall t \geq 0, t \leq 1, t < \frac{\alpha}{\left|M-m\right|} \qquad (12)$$

Από τις (10),(12)

$$f(m) \geq f(tM + (1-t)m), \forall t \geq 0, t \leq 1, t < \frac{\alpha}{\left|M-m\right|} \qquad (13)$$

Από τις (9),(11)

$$f(tM + (1-t)m) > f(m), \forall t > 0, t \leq 1 \qquad (14)$$

Οι (13),(14) αντιφάσκουν για όλα τα $t > 0, t \leq 1, t < \dfrac{\alpha}{\left|M-m\right|}$

ΘΕΜΑ 4

Να επιλυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
&\max U = x + \theta \log(a + A) \\
&\text{subject to} \\
&x + pa \le m, x \ge 0, a \ge 0 \\
&\text{μεταβλητες} \quad x, a \\
&\text{παραμετροι} \quad \theta > 0, A \ge 0, p > 0, m > 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$
(x,a) = \begin{cases} (m,0) & \text{if} \quad pA \ge \theta \\ \left(m + pA - \theta, \dfrac{\theta}{p} - A\right) & \text{if} \quad \theta - m \le pA \le \theta \\ \left(0, \dfrac{m}{p}\right) & \text{if} \quad pA \le \theta - m \end{cases}
\tag{16}
$$

ΘΕΜΑ 5

Να ευρεθεί εάν η ακόλουθη συνάρτηση είναι αυστηρώς κυρτή

$$
f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} - 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{17}
$$

<u>Απάντηση</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$
f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \forall x \ne a \tag{18}
$$

Παρατηρούμε ότι η (18) είναι ισοδύναμη με την

$$
\begin{aligned}
&g(x) > g(a) + g'(a)(x - a), \forall x \ne a \\
&g(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \sqrt{|x|^2 + 1}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Και ότι

$$g'(a) = \frac{a}{g(a)} \tag{20}$$

Από τις (19),(20) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$g(x)g(a) > \left(g(a)\right)^2 + (x-a)a, \forall x \neq a \tag{21}$$

Με αντικατάσταση και πράξεις η (21) γράφεται ως

$$\left(|x||a|\right)^2 - |xa|^2 + |x-a|^2 > 0, \forall x \neq a \tag{22}$$

Η (22) ισχύει διότι

$$|x||a| \geq |xa| \quad \text{(cauchy-schwartz)} \tag{23}$$

και

$$|x-a| > 0, \forall x \neq a \tag{24}$$