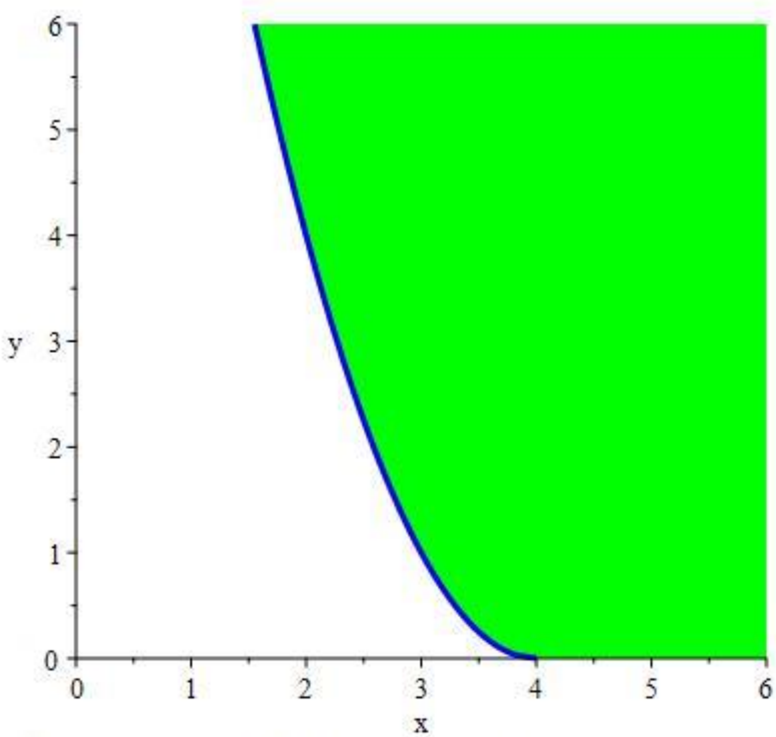
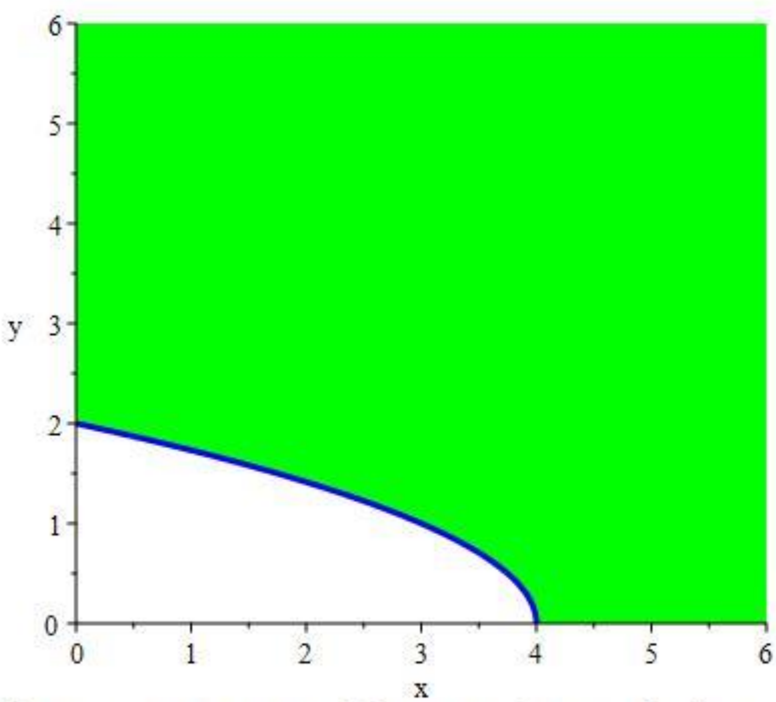
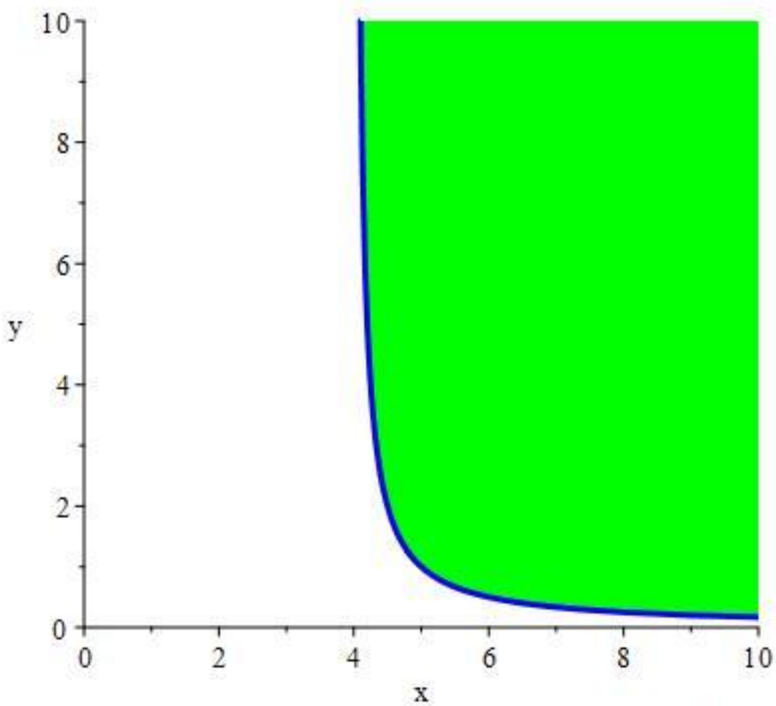
Problem1



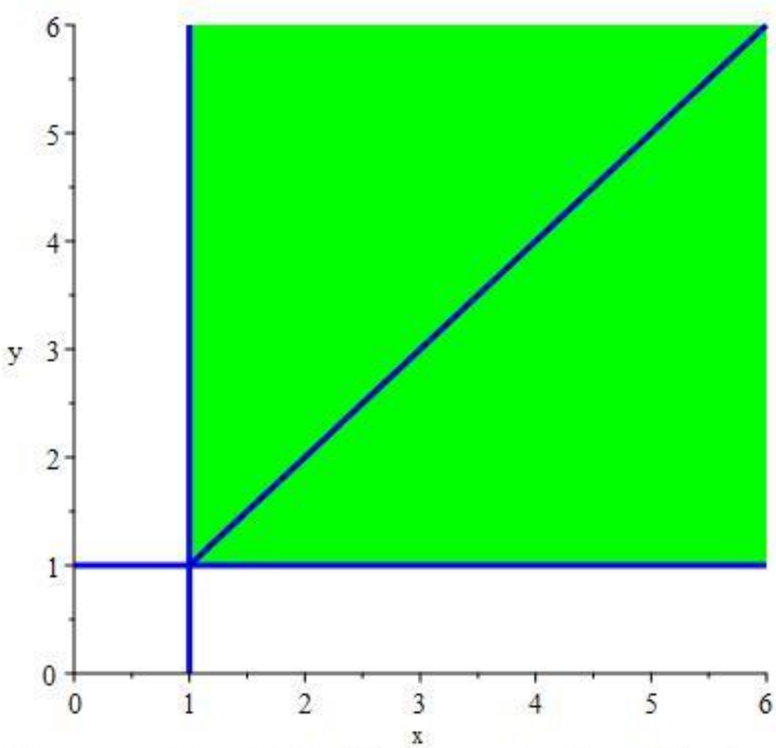
the upper contour set at 4 of the concave function $x+\sqrt{y}$



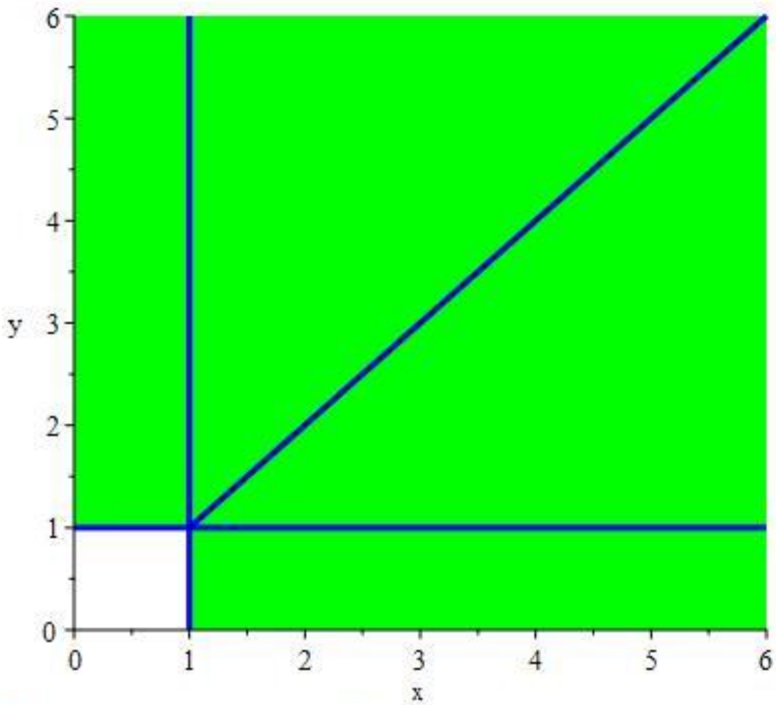
the upper contour set at 4 of the non quasi-concave function y^2+x



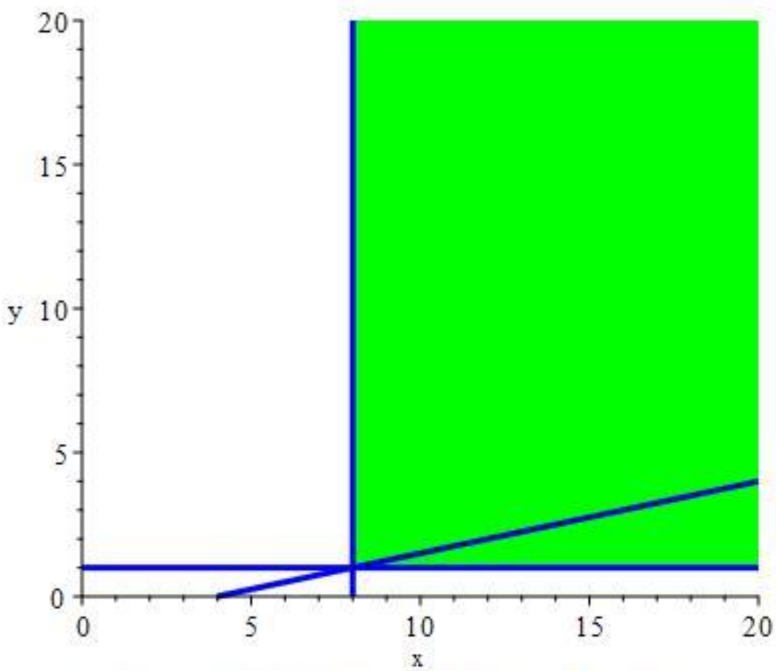
the upper contour set at 4 of the concave function $x - \frac{1}{y}$



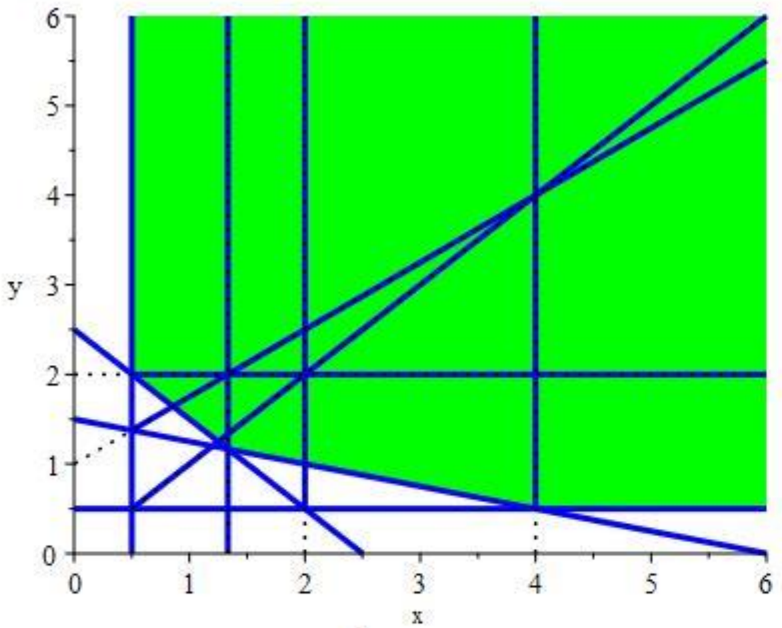
the upper contour set at 1 of the concave function $\min(x, y)$



the upper contour set at 1 of the non quasi-concave function
$\max(x, y)$

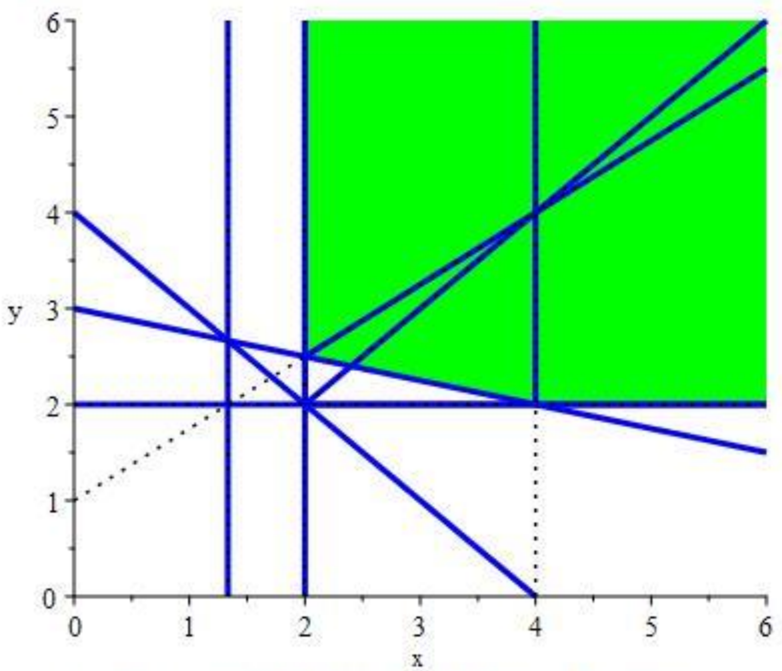


the upper contour set at 3 of the concave function
$\min\left(\frac{1}{4}x + 1, y + 2\right)$



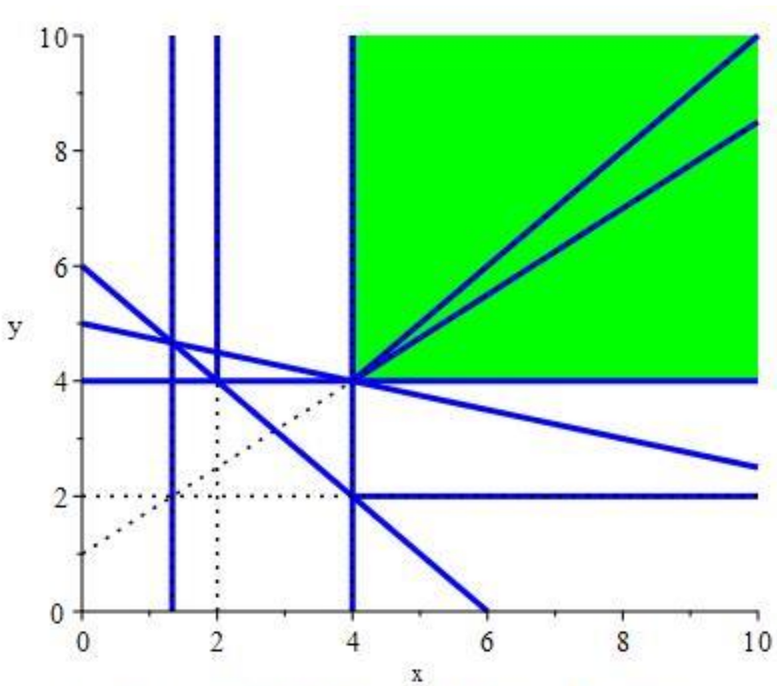
the upper contour set at $\frac{1}{2}$ of the concave function

$$\min\left(x, y, x+y-2, \frac{1}{4}x+y-1\right)$$



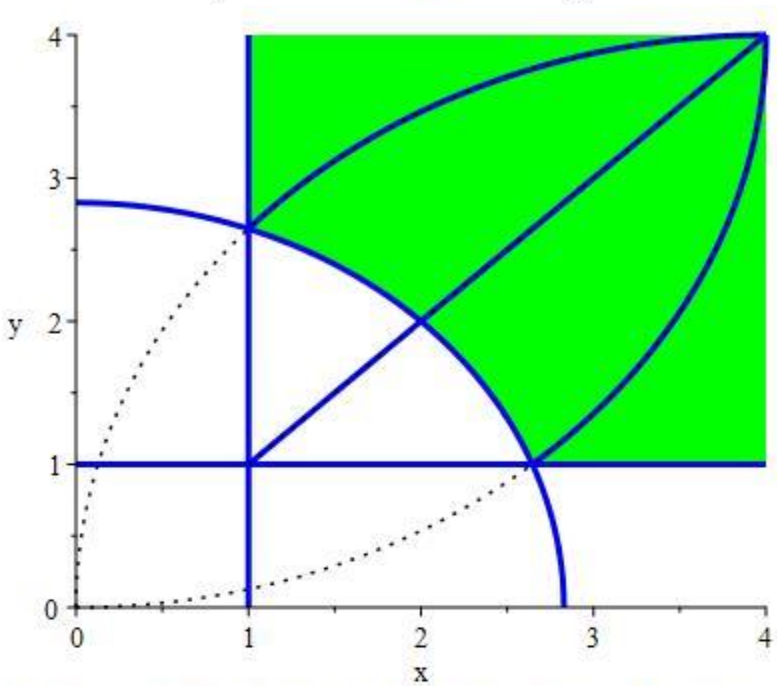
the upper contour set at 2 of the concave function

$$\min\left(x, y, x+y-2, \frac{1}{4}x+y-1\right)$$



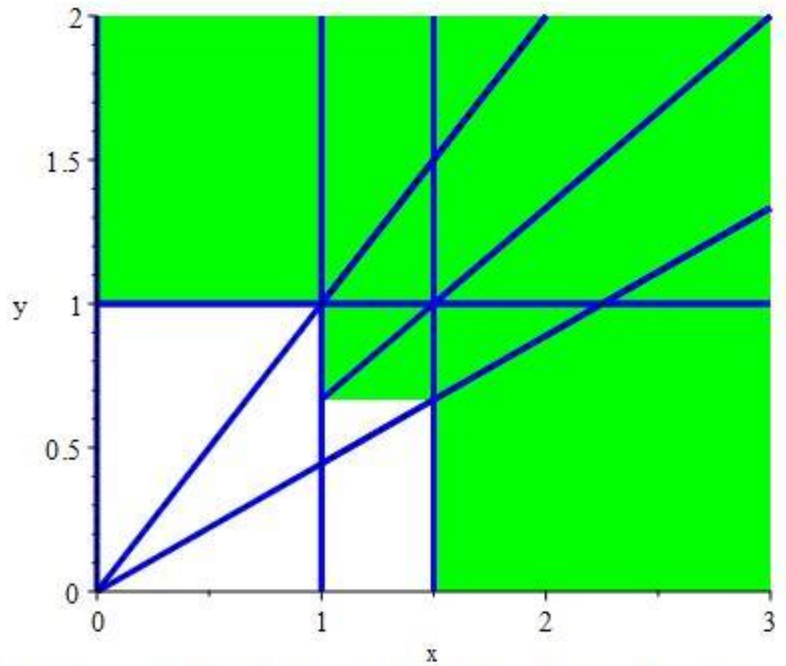
the upper contour set at 4 of the concave function

$$\min\left(x, y, x+y-2, \frac{1}{4}x+y-1\right)$$



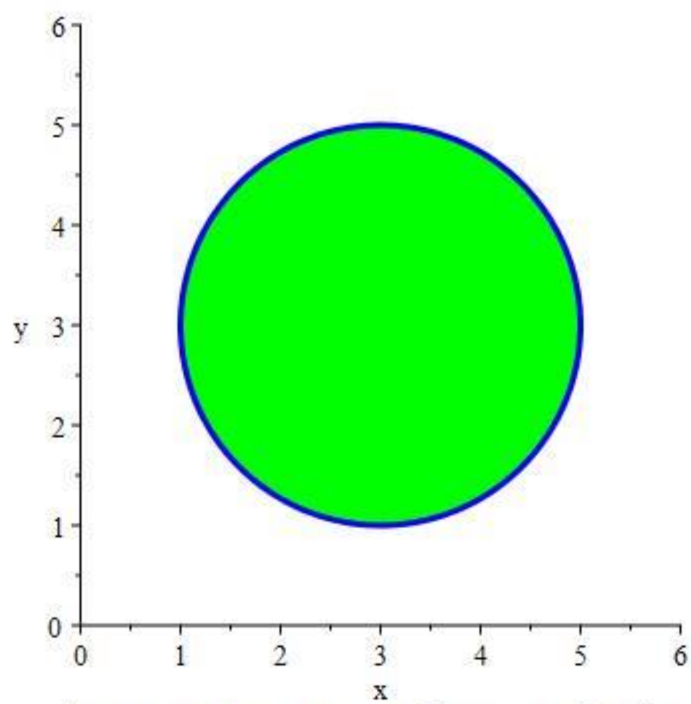
the upper contour set at 1 of the non quasi-concave function

$$\min\left(x, y, \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}y^2\right)$$



the upper contour set at 1 of the non quasi-concave function

$$\min\left(\max(x, y), \max\left(\frac{2}{3}x, \frac{3}{2}y\right)\right)$$



the upper contour set at -4 of the concave function

$$-(x-3)^2-(y-3)^2$$

Problem 2.4

$$x = \begin{cases} m/p & \text{if} \quad m \le 3p \\ \\ 3 & \text{if} \quad m \ge 3p \end{cases} \tag{1}$$

Problem 3.1

Imitate the following from the notes on optimization

παραδειγμα 6

Συναρτηση στοχου η οποια δεν ειναι παντου παραγωγισιμη,δυο μεταβλητες.

Να επιλυθει το προβλημα $\max \Pi = 2p\sqrt{KL} - rK - wL, K \ge 0, L \ge 0$,οπου οι παραμετροι p, w, r ειναι θετικοι αριθμοι. Προκειται για τη μεγιστοποιηση κερδους μιας επιχειρησης της οποιας η τεχνολογια περιγραφεται απο την συναρτηση παραγωγης $2\sqrt{KL}$,τυπου cobb-douglas με σταθερες αποδοσεις κλιμακος.◊

Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται,διοτι το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο οι ικανες συνθηκες πληρουνται,διοτι συνάρτηση στοχου Π είναι κοιλη.
Η συνάρτηση στοχου Π δεν ειναι παραγωγισιμη στα σημεια οπου $K = 0$ η $L = 0$.Αυτα τα σημεια πρεπει να αναλυθουν χωριστα.

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως ειναι

$$\begin{aligned} p\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} \le r, \left(p\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} - r \right) K = 0 \\ p\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \le w, \left(p\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} - w \right) L = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Αρα τοπικο μεγιστο της μορφης $K > 0, L > 0$ υπαρχει εάν και μόνο εάν

$$p^2 = wr, L = \frac{r}{w}K \tag{3}$$

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει ενα ολικο μεγιστο στην περιπτωση που $p^2 = wr$

global maximum

$$(K, L, \Pi) = \begin{cases} (K, \frac{r}{w}K, 0) & \text{if} \quad p^2 = wr \\ ? & \text{if} \quad p^2 \ne wr \end{cases} \tag{4}$$

Η συνθήκη $p^2 = wr$ είναι επί των παραμετρων,αρα θα πρέπει να εξετάσουμε τις συμβαίνει όταν $p^2 \neq wr$.

Παρατηρουμε οτι όταν $p^2 \neq wr$ είτε η λύση θα είναι $K=0, L=0$,είτε δεν θα υπάρχει λυση,διοτι λυση της μορφης $K>0, L>0$ προυποθετει οτι $p^2 = wr$,ενω οι μορφες $K=0, L>0$ και $K>0, L=0$ δεν ειναι ποτε λυσεις γιατι αποφερουν αρνητικο κερδος,οπως δειχνουν και οι

$$\Pi(0,L) = 2p\sqrt{\cancel{K}L} - r\cancel{K} - wL = -wL < 0 = \Pi(0,0)$$

$$\Pi(K,0) = 2p\sqrt{K\cancel{L}} - rK - w\cancel{L} = -rK < 0 = \Pi(0,0)$$

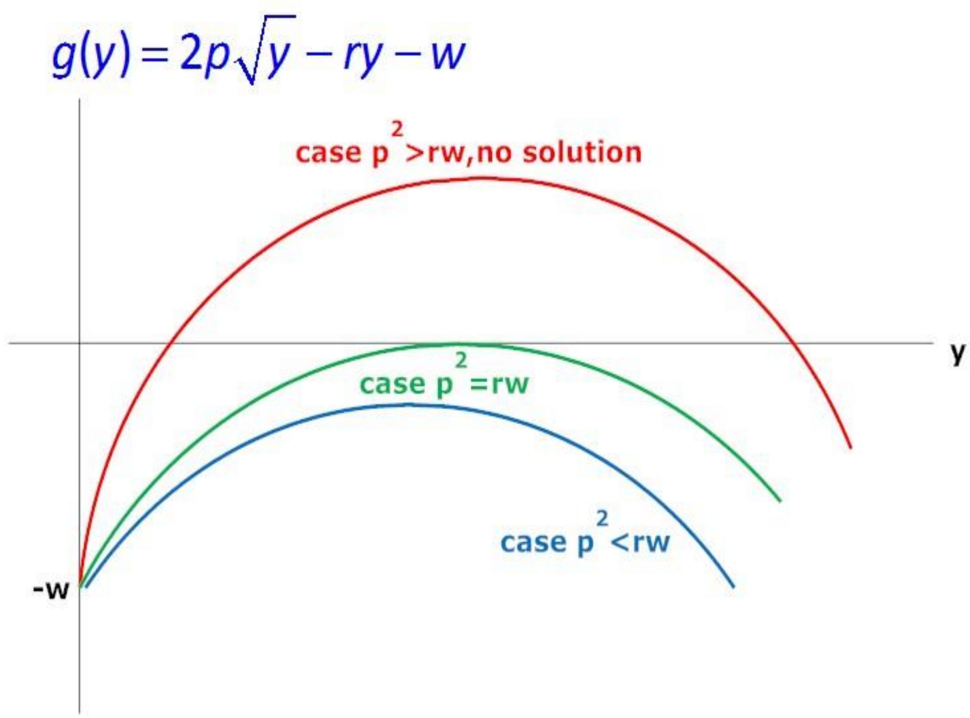
Για να αποφανθουμε για την υπαρξη λυσης ,γραφουμε τη συνάρτηση κέρδους ως εξής

$$\Pi(K,L) = L(2p\sqrt{\frac{K}{L}} - r\frac{K}{L} - w) \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση στην παρένθεση εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y = \frac{K}{L}$,και γράφουμε $\Pi(y,L) = L(2p\sqrt{y} - ry - w) = Lg(y)$

Παρατηρούμε ότι η Π μπορεί να πάρει θετικές τιμές μόνο όταν η $g(y)$ μπορεί να πάρει θετικές τιμες.

Η $g(y)$ είναι κοίλη συνάρτηση που μεγιστοποιείται στο σημείο όπου $g'(y) = 0$,δηλαδή στο σημείο $y = \frac{p^2}{r^2}$,και άρα η μέγιστη τιμή της $g(y)$ είναι $g(\frac{p^2}{r^2}) = \frac{p^2}{r} - w$



Απο την τελευταια προταση συναγουμε οτι $\Pi(y,L)=Lg(y)\le L\left(\frac{p^2}{r}-w\right), \forall y \forall L$,αρα

το πρόβλημα δεν έχει λύση όταν $p^2 > wr$,διοτι η συναρτηση στοχου τεινει στο απειρο οταν

$$y=\frac{p^2}{r^2}, L\to\infty$$

το πρόβλημα έχει την μοναδικη λύση $K=0, L=0$ όταν $p^2 < wr$,διοτι

$$\forall L>0, \Pi(y,L)=Lg(y)<L\left(\frac{p^2}{r}-w\right)<0=\Pi(K=0,L=0).$$

Καταληγουμε οτι

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximun}\\ (K,L,\Pi)=\begin{cases}(0,0,0) & \text{if} \quad p^2<wr\\ \left(K,\frac{r}{w}K,0\right) & \text{if} \quad p^2=wr\\ \text{no solution} & \text{if} \quad p^2>wr\end{cases}\end{array}} \tag{6}$$

Problem 3.2

$$K=\frac{p^2}{r^{3/2}\sqrt{w}}, L=\frac{p^2}{\sqrt{r}w^{3/2}} \tag{7}$$

Problem 3.3

No solution exists.

Problem 3.4

$$(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{wm-p^2}{pw},\frac{p^2}{w^2}\right) & \text{if} \quad p^2\le wm\\ \\ \left(0,\frac{m}{w}\right) & \text{if} \quad p^2\ge wm\end{cases} \tag{8}$$

Problem 3.5

$$(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{m-\sqrt{pw}}{p},\sqrt{\dfrac{p}{w}}\right) & \text{if} \quad m^2\ge wp\\[2ex] \left(0,\dfrac{m}{w}\right) & \text{if} \quad m^2\le wp\end{cases} \tag{9}$$

Problem 3.6

Imitate the following from the notes on optimization

παραδειγμα 11

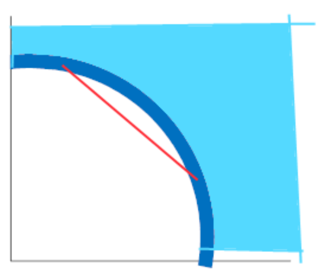
(Το συνολο των ολικων μεγιστων δεν ειναι κυρτο.Οι λυσεις δεν ειναι συνεχεις συναρτησεις των παραμετρων).

Να επιλυθει το προβλημα $\max f(x,y)=x^2+y^2$, subject to $px+qy\le m, x\ge 0, y\ge 0$ οπου ολες οι παραμετροι p,q,m ειναι θετικοι αριθμοι.Προκειται για τυπικο προβλημα καταναλωτη με μη κυρτες προτιμησεις.

Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.

Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,γιατι η συναρτηση στοχου δεν ειναι οιονει κοιλη

the utility function $u=x^2+y^2$ has nonconvex better-than sets



Οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων πληρουνται,διοτι η λαγρανζιανη $L=\lambda_0(x^2+y^2)+\lambda_1(m-px-qy)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$L_x=2\lambda_0 x-\lambda_1 p\le 0, xL_x=x\left(2\lambda_0 x-\lambda_1 p\right)=0 \tag{10}$$

$$L_y=2\lambda_0 y-\lambda_1 q\le 0, yL_y=y\left(2\lambda_0 y-\lambda_1 q\right)=0 \tag{11}$$

$$m-px-qy\ge 0, \lambda_1(m-px-qy)=0 \tag{12}$$

$$x,y,\lambda_1\ge 0, \lambda_0\in\{0,1\}, \lambda_0=0 \Rightarrow \lambda_1>0, \lambda_1=0\Rightarrow \lambda_0>0 \tag{13}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ 'ΥΠΟΘΕΣΗ-ΛΥΣΗ-ΕΛΕΓΧΟΣ'

υποθεση $\lambda_0 = 0$

λυση απο την (13) $\lambda_1 > 0$.απο τις (10),(11) $x = 0, y = 0$.απο την (12) $m - px - qy = 0$

ελεγχος αντιφαση $m = 0$.

νεα υποθεση $\lambda_0 = 1, x > 0, y > 0$

λυση απο τις (10),(11) $2x = \lambda_1 p, 2y = \lambda_1 q$.αρα $\lambda_1 > 0$, $m - px - qy = 0$.βρισκουμε οτι

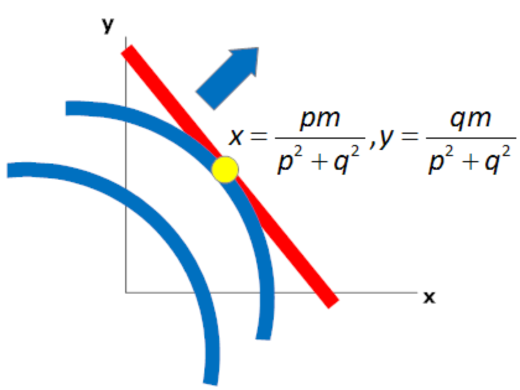
$$x = \frac{pm}{p^2 + q^2}, y = \frac{qm}{p^2 + q^2}$$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = \frac{pm}{p^2 + q^2}, y = \frac{qm}{p^2 + q^2}$	$f = \frac{m^2}{p^2 + q^2}$

one of the solutions of the necessary conditions



νεα υποθεση $\lambda_0 = 1, x > 0, y = 0$

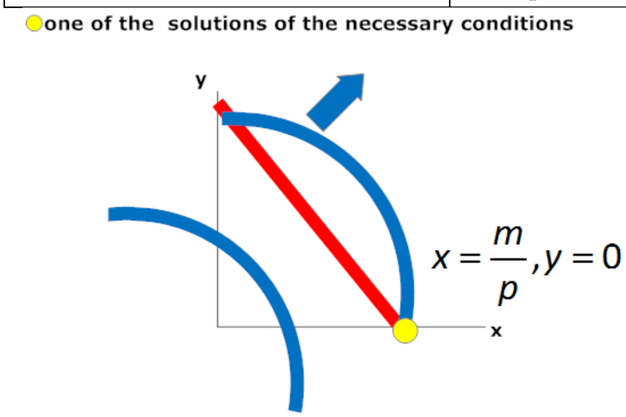
λυση απο τις (10),(11) $2x = \lambda_1 p, 0 \le \lambda_1 q$.αρα $\lambda_1 > 0$, $m - px = 0$.βρισκουμε οτι

$$x = \frac{m}{p}, y = 0, \lambda_1 = \frac{2m}{p^2}$$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = \frac{pm}{p^2+q^2}, y = \frac{qm}{p^2+q^2}$	$f = \frac{m^2}{p^2+q^2}$
$x = \frac{m}{p}, y = 0$	$f = \frac{m^2}{p^2}$



<u>νεα υποθεση</u> $\lambda_0 = 1, x = 0, y > 0$

<u>λυση</u> απο τις (10),(11) $0 \le \lambda_1 p, 2y = \lambda_1 q$.αρα $\lambda_1 > 0$, $m - qy = 0$.βρισκουμε οτι

$$x = 0, y = \frac{m}{q}, \lambda_1 = \frac{2m}{q^2}$$

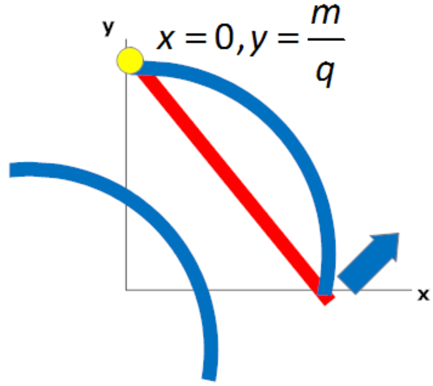
<u>ελεγχος</u> οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = \frac{pm}{p^2+q^2}, y = \frac{qm}{p^2+q^2}$	$f = \frac{m^2}{p^2+q^2}$
$x = \frac{m}{p}, y = 0$	$f = \frac{m^2}{p^2}$

$x=0, y=\dfrac{m}{q}$	$f=\dfrac{m^2}{q^2}$

one of the solutions of the necessary conditions



<u>νεα υποθεση</u> $\lambda_0=1, x=0, y=0$

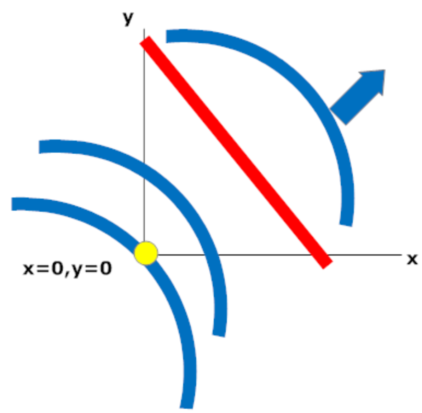
<u>λυση</u> απο τις (10),(11) $0\le\lambda_1 p, 0\le\lambda_1 q$.επειδη $m-px-qy=m>0$,η (12)συνεπαγεται $\lambda_1=0$.βρισκουμε οτι $x=0, y=0, \lambda_1=0$

<u>ελεγχος</u> οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x=\dfrac{pm}{p^2+q^2}, y=\dfrac{qm}{p^2+q^2}$	$f=\dfrac{m^2}{p^2+q^2}$
$x=\dfrac{m}{p}, y=0$	$f=\dfrac{m^2}{p^2}$
$x=0, y=\dfrac{m}{q}$	$f=\dfrac{m^2}{q^2}$
$x=0, y=0$	$f=0$

one of the solutions of the necessary conditions



Επειδη εχουμε εξαντλησει τις περιπτωσεις ,δεν υπαρχουν αλλα υποψηφια τοπικα μεγιστα.

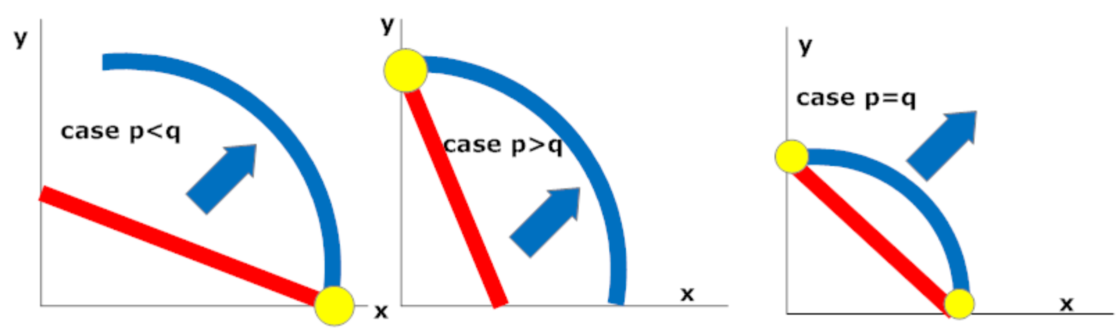
Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται,υπαρχει ολικο μεγιστο

Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων ικανοποιουνται,το ολικο μεγιστο ειναι μια απο τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων

Συγκρινοντας τις τιμες της συναρτησης στοχου στις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων,βρισκουμε οτι το ολικο μεγιστο ειναι

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximun}\\ (x,y)=\begin{cases}(\frac{m}{p},0) & \text{if} \quad p<q\\ \left\{\left(\frac{m}{p},0\right),(0,\frac{m}{q})\right\} & \text{if} \quad p=q\\ (0,\frac{m}{q}) & \text{if} \quad p>q\end{cases}\end{array}} \tag{14}$$

global maxima



Problem 3.7

$$x = m, y = 0 \tag{15}$$

Problem 4.1

$$x_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \frac{m}{p_i} \tag{16}$$

Problem 4.2

No solution exists for $n \geq 2$

Problem 4.3

$$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } \dfrac{m}{p_1} \leq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \\ \dfrac{m}{p_1} - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i & \text{if } \dfrac{m}{p_1} \geq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right)} \dfrac{m}{p_i} & \text{if } \dfrac{m}{p_1} \leq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \\ & \boxed{i \geq 2} \\ \alpha_i \dfrac{p_1}{p_i} & \text{if } \dfrac{m}{p_1} \geq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \end{cases} \tag{17}$$