

ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΙ ΟΙΟΝΕΙ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμος Για καθε συναρτηση $f: S \rightarrow R$ και καθε αριθμο α οριζουμε

- Την **καμπυλη αδιαφοριας**(indifference curve,level set) της f

$$I_\alpha = \{x \in S, f(x) = \alpha\}$$

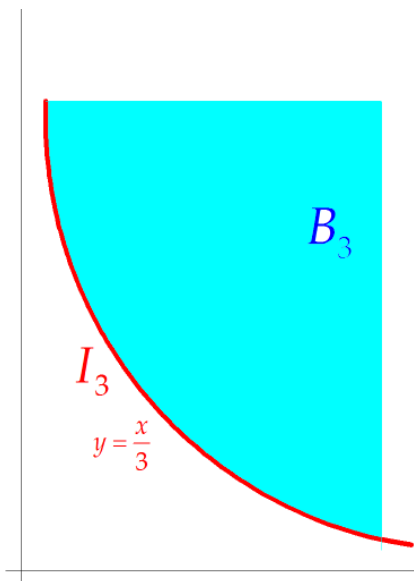
- Το **υπερτερο συνολο** (upper contour set,better-than set) της f

$$B_\alpha = \{x \in S, f(x) \geq \alpha\}$$

Παραδειγμα1 υπερτερο συνολο,καμπυλη αδιαφοριας

$$f(x, y) = xy, S = R_+^2, \alpha = 3. \text{τοτε}$$

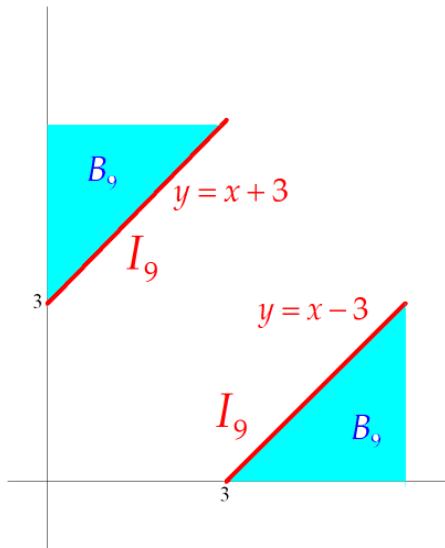
$$I_3 = \{(x, y) \in R_+^2, xy = 3\}, B_3 = \{(x, y) \in R_+^2, xy \geq 3\}$$



Παραδειγμα2 τα υπερτερα συνολα και οι καμπυλες αδιαφοριας μιας συναρτησης μπορουν να παρουν οποιοδηποτε σχημα,αναλογα με τις ιδιοτητες της συναρτησης.

$$f(x, y) = (x - y)^2, S = R_+^2, \alpha = 9. \text{τοτε}$$

$$I_9 = \{(x, y) \in R_+^2, |x - y| = 3\}, B_9 = \{(x, y) \in R_+^2, |x - y| \geq 3\}$$



Ορισμος Η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ είναι οιονει-κοιλη (quasi-concave) εαν ολα τα υπερτερα συνολα της είναι κυρτα.

- μια ισοδυναμη εκφραση είναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ είναι οιονει-κοιλη εαν το εφικτο συνολο S είναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0, 1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$.
- Η συναρτηση στο παραδειγμα 1 είναι οιονει κοιλη, ενω στο παραδειγμα 2 δεν είναι.

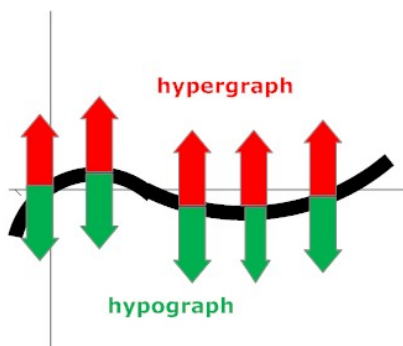
Ορισμος Για καθε συναρτηση $f : S \rightarrow R$ οριζουμε το

Υπογραφημα(hypograph) $\{(y, x), y \in R, x \in S, y \leq f(x)\}$

Υπεργραφημα(hypergraph) $\{(y, x), y \in R, x \in S, y \geq f(x)\}$

Παραδειγμα 3 υπεργραφημα και υπογραφημα

$$f(x) = x(x-1)(x-2), S = R$$



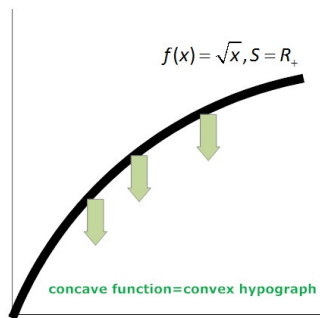
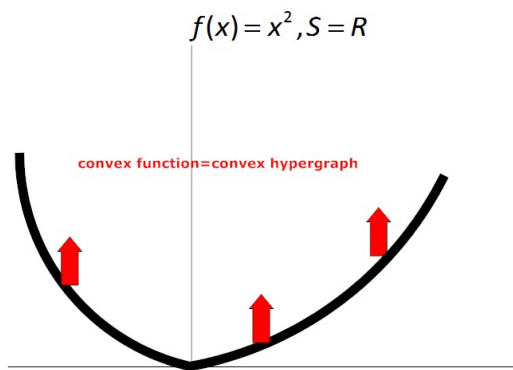
Ορισμος Η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ είναι

Κοιλη(concave) εαν το υπογραφημα της ειναι κυρτο.

- Μια ισοδυναμη εκφραση ειναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ ειναι κοιλη εαν το S ειναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0, 1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

Κυρτη(convex) εαν το υπεργραφημα της ειναι κυρτο

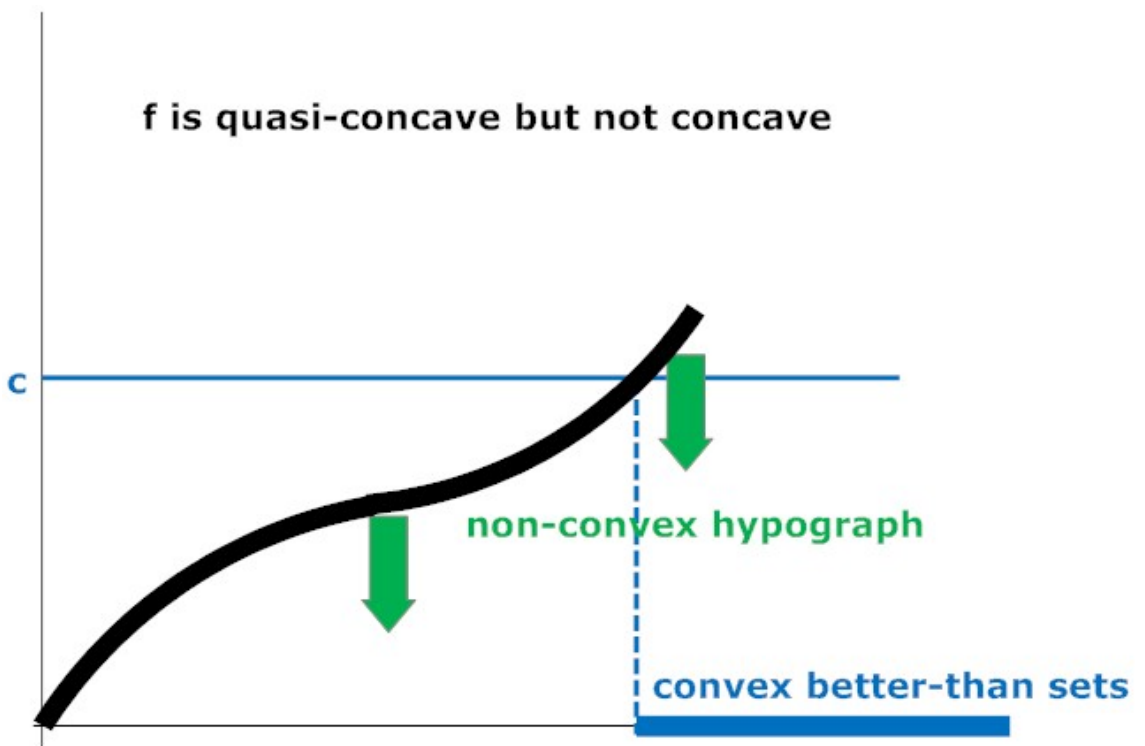
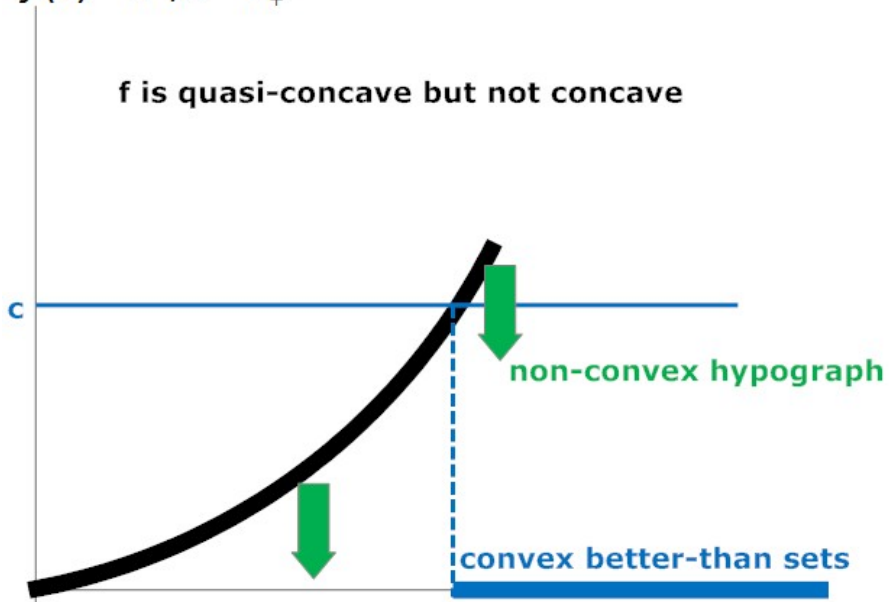
- Μια ισοδυναμη εκφραση ειναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ ειναι κυρτη εαν το S ειναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0, 1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Παραδειγμα 4 κοιλη συναρτηση**Παραδειγμα 5** κυρτη συναρτηση

- Η συναρτηση του παραδειγματος 3 δεν ειναι ουτε κυρτη ουτε κοιλη.Ειναι κοιλη στο διαστημα $[0,1]$,και κυρτη στο διαστημα $[1,2]$.
- Η f ειναι κυρτη εαν και μονο εαν η $-f$ ειναι κοιλη.
- Καθε κοιλη συναρτηση ειναι και οιονει κοιλη.το αντιστροφο δεν ισχυει
- Εαν μια συναρτηση ειναι οιονει κοιλη,τοτε το πεδιο ορισμου της S ειναι κυρτο

Παραδειγμα 6 οιονει κοιλες αλλα οχι κοιλες συνρτησεις

$$f(x) = x^2, S = R_+$$



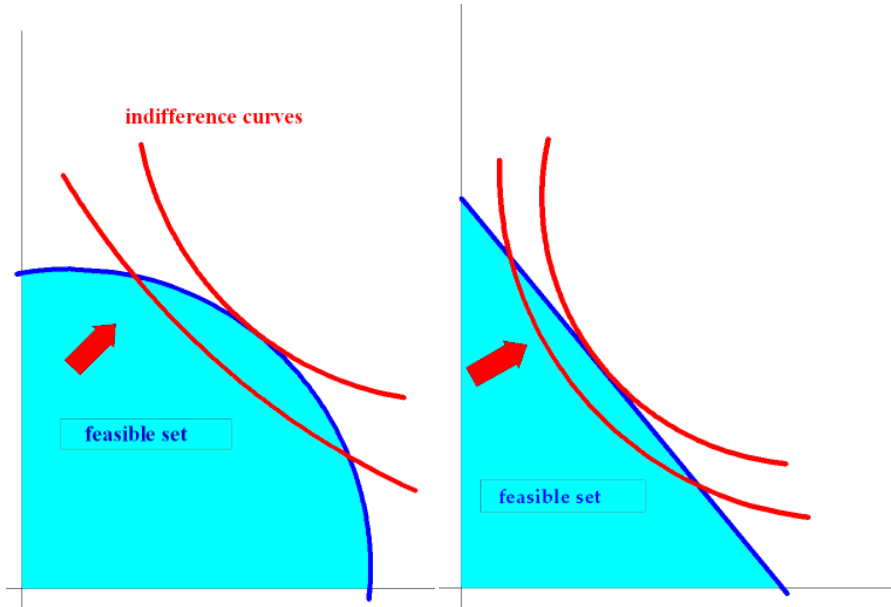
- Ο λογος που μας ενδιαφερουν οι οιονει κοιλες συναρτησεις ειναι τα ακολουθα θεωρηματα.

ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (ARROW-ENTHOVEN) Εαν το εφικτο
 συνολο ειναι κυρτο και

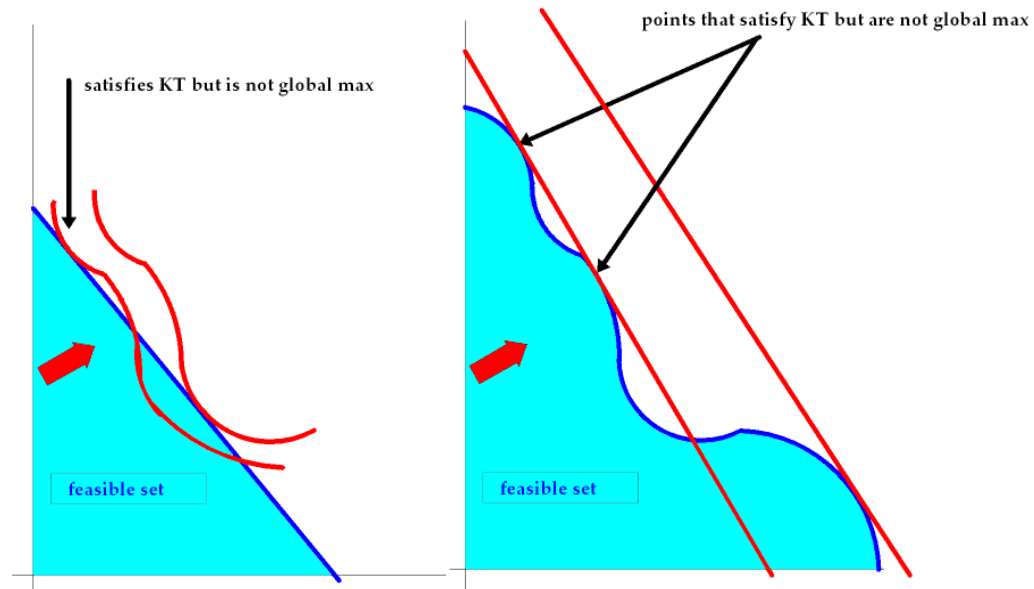
- είτε η συνάρτηση στοχου είναι οιονει κοιλη και $f'(x) \neq 0$ για καθε εφικτο x ,
- είτε η συνάρτηση στοχου είναι κοιλη,

τοτε καθε λυση των αναγκαιων συνθηκων είναι και ολικο μεγιστο.

- οι υποθεσεις arrow-enthoven αναπαραγουν τα τυπικα διαγραμματα μεγιστοποιησης,οπως



και αποκλειουν περιπτωσεις οπως

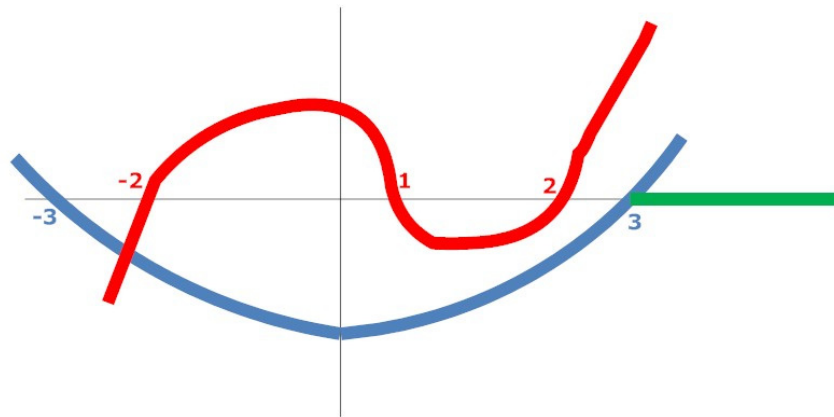


- εαν ολες οι συναρτησεις g_1, g_2, \dots, g_m είναι οιονει κοιλες,τοτε το εφικτο συνολο είναι κυρτο,ως τομη των κυρτων υπερτερων συνολων των g_1, g_2, \dots, g_m .

- το εφικτο συνολο μπορεί να είναι κυρτο ακόμα και αν καμια απο τις συναρτησεις g_1, g_2, \dots, g_m δεν είναι οιονει κοιλη.

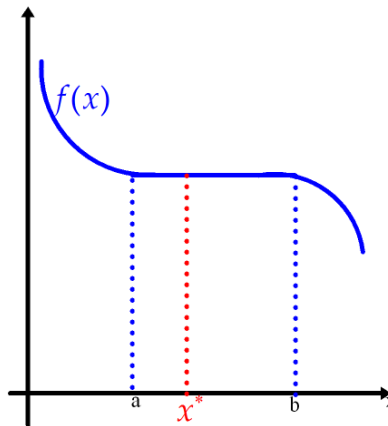
the feasible set can be convex even if none of its defining functions is quasi-concave

feasible set = x such that $g_1(x) = (x-3)(x+3) \geq 0$ and $g_2(x) = (x+2)(x-1)(x-2) \geq 0 = x \geq 3$



- η συνθηκη $f'(x^*) \neq 0$ αποκλειει περιπτωσεις οπως η ακολουθη

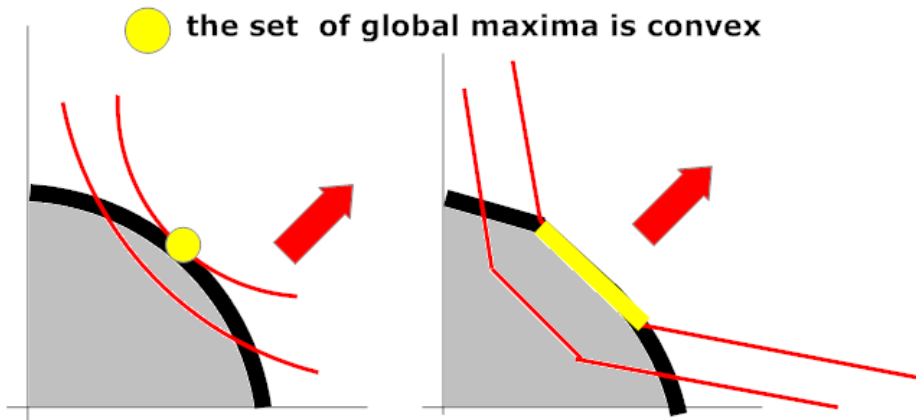
$$\max f(x), x \geq 0$$



Η συναρτηση f είναι οιονει κοιλη στο εφικτο συνολο $x \geq 0$, ως φθινουσα, και ταυτοχρονα δεν είναι κοιλη. Παρολο που η συναρτηση δεν έχει ολικο μεγαστο, καθε σημειο $x^* \in (a, b)$ ικανοποιει $f'(x^*) = 0$, και αρα τις αναγκαιες συνθηκες ■

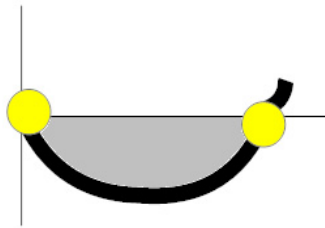
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΟΛΙΚΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Εαν η συναρτηση στοχου ειναι οιονει κοιλη, και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο, τοτε το συνολο των ολικων μεγιστων ειναι κυρτο.

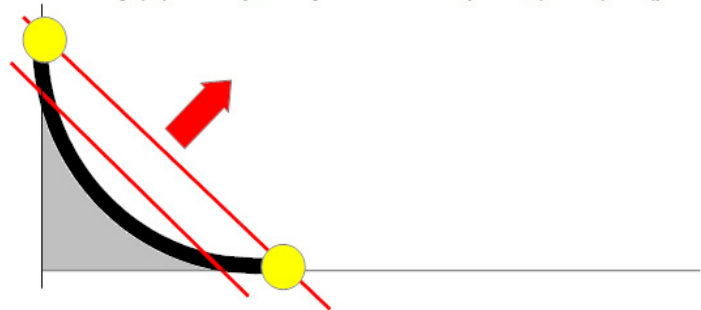


● the set of global maxima is not convex

$$\max f(x) = x^2 - x, \text{ subject to } 0 \leq x \leq 1$$



$$\max f(x) = x + y, \text{ subject to } x \leq 1, y \leq 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1$$



Ορισμος Η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ ειναι αυστηρα οιονει-κοιλη (strictly quasi-concave) εαν

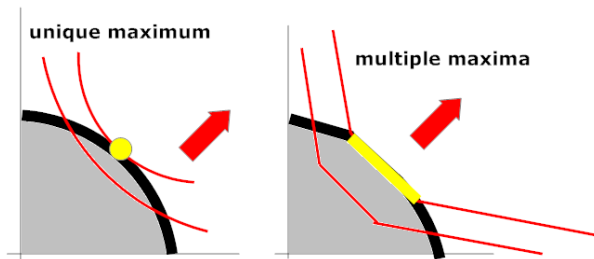
Καθε υπερτερο συνολο της ειναι κυρτο.

Το περιβλημα του καθε υπερτερου συνολου δεν περιεχει γραμμικα τμηματα.

- μια ισοδυναμη εκφραση ειναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \rightarrow R$ ειναι οιονει-κοιλη εαν το πεδιο ορισμου ειναι κυρτο και για καθε $x \neq y \in S, t \in (0, 1)$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) > \min\{f(x), f(y)\}$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Εαν η συναρτηση στοχου ειναι αυστηρα οιονει κοιλη, και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο, τοτε υπαρχει το πολυ ενα ολικο μεγιστο



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

Εαν τουλαχιστον ενα απο τα ακολουθα κριτηρια ισχυει, τοτε η συναρτηση $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ειναι κοιλη. Στις περιπτωσης 3 και 7 ισχυει και το αντιστροφο.

1. για καθε $x, y \in S, t \in [0, 1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$
2. η f ειναι γραμμικη+σταθερα, δηλαδη της μορφης $f(x) = \rho x + \alpha = \rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n + \alpha$
3. $n = 1$ και $f''(x) \leq 0, \forall x \in S$
4. $f = \alpha g, \alpha > 0, g$ κοιλη (θετικος επι κοιλη=κοιλη)
5. $f = g + h$, και g, h κοιλες (κοιλη+κοιλη=κοιλη)
6. $f(x) = g(u(x)), u$ concave, g increasing and concave (Ο αυξων κοιλος μετασχηματισμος μιας κοιλης συναρτησης ειναι κοιλη συναρτηση)
7. το προσημο της ηγετικης κυριας ελασσονος (leading principal minor) ταξεως k του εσσιανου πινακα της f ειναι το ιδιο με του $(-1)^k$, δηλαδη

$$(-1)^k \det \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1k}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kk}(x) \end{bmatrix} > 0, \forall k = 1, \dots, n$$

- η ηγετικη κυρια ελασσων (leading principal minor) ταξεως k αποκταται αφαιρωντας απο τον εσσιανου πινακα τις τελευταιες $n-k$ γραμμες και τις ιδιες στηλες. Υπαρχουν ακριβως $n-1$ τετοιες ελασσονες.

8. το προσημο καθε κυριας ελασσονος (principal minor) ταξεως k του εσσιανου πινακα της f ειναι το ιδιο με του $(-1)^k$, η ειναι 0.

- Μια κυρία ελασσων (principal minor) ταξως κ αποκταται αφαιρωντας απο τον εσσιανο πινακα οποιοσδηποτε n-k γραμμες και τις ιδιες στηλες. Υπαρχουν ακριβως $2^n - 1$ τετοιες ελασσονες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΟΙΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. λογαριθμικη $\log(x), x > 0$
2. εκθετικη $x^\alpha, x > 0$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha(\alpha - 1) \leq 0$
3. εκθετικη $-x^\alpha, x > 0$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha(\alpha - 1) \geq 0$
4. διωνυμικη $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \leq 0$.
5. $\frac{x}{x + \alpha}, x > -\alpha$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \geq 0$.
6. εκθετικη $-e^{-\alpha x}, x > 0$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \geq 0$.
7. $y +$ μια απο τις παραπανω συναρτησεις.
8. cobb-douglas $x^a y^b, x > 0, y > 0$, οπου το a, b ειναι παραμετροι, $0 \leq a, 0 \leq b, a + b \leq 1$
9. leontief $\min\{x, y\}$
10. constant elasticity of substitution (CES) $(x^r + y^r)^{1/r}, x > 0, y > 0$, οπου το r ειναι παραμετρο, $0 < r \leq 1$, διοτι

$$Hessian = \begin{bmatrix} \frac{x^{(-2+r)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} y^r (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} & - \frac{x^{(r-1)} y^{(r-1)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} \\ - \frac{x^{(r-1)} y^{(r-1)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} & \frac{y^{(-2+r)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} x^r (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} \end{bmatrix}$$

$$\det(Hessian) = 0$$

$$\frac{x^{(-2+r)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} y^r (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} \leq 0$$

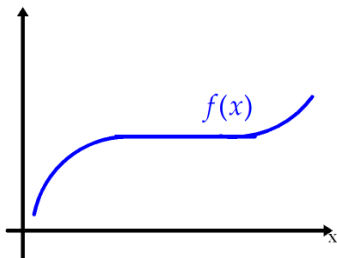
$$\frac{y^{(-2+r)} (x^r + y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} x^r (r-1)}{x^{(2r)} + 2x^r y^r + y^{(2r)}} \leq 0$$

10. Ο αυξων μετασχηματισμος μιας κοιλης συναρτησης δεν ειναι αναγκαστικα κοιλη συναρτηση. Η $u(x) = x^{\frac{1}{2}}, x > 0$ ειναι κοιλη και η $g(z) = z^4, z > 0$ ειναι αυστηρως αυξουσα, αλλα η συναρτηση $v(x) = g(u(x)) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = x^2$ δεν ειναι κοιλη.

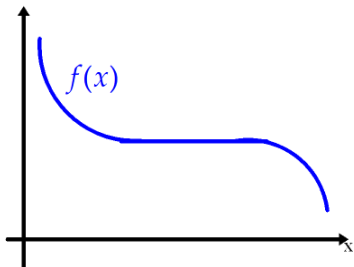
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΙΟΝΕΙ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

Εαν τουλαχιστον ενα απο τα ακολουθα κριτηρια ισχυει, τοτε η συναρτηση $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ειναι οιονει κοιλη. Για το πρωτο κριτηριο ισχυει και το αντιστροφο. Το πεδιο ορισμου S πρεπει να ειναι κυρτο σε ολα τα ακολουθα κριτηρια

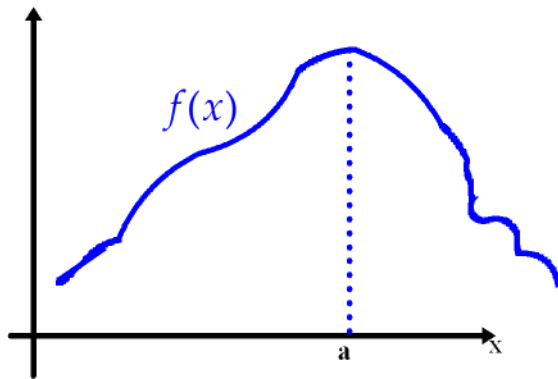
1. για καθε $x, y \in S, t \in [0, 1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$
2. η f ειναι κοιλη
3. $n=1$ και η f ειναι αυξουσα συναρτηση



4. $n=1$ και η f ειναι φθινουσα συναρτηση



5. $n=1$, η f εχει ενα και μοναδικο ολικο μεγιστο a και ειναι αυξουσα αριστερα του a , φθινουσα δεξια του.



6. η f είναι μονοτονικός μετασχηματισμός μιας οίονει κοίλης συναρτησης, δηλαδή $v = g \circ u$, g strictly increasing, u quasi-concave

Παραδειγμα. η $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ είναι κοίλη στο σύνολο $x > 0, y > 0$, και η $g(z) = z^2$ είναι αυστηρώς αυξουσα στο σύνολο $z > 0$, άρα η συναρτηση $v(x, y) = g(u(x, y)) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$ είναι οίονει κοίλη

7. κριτήριο του περιφραγμένου εσσιανου πινακα (bordered hessian matrix) $BH(x)$.

για καθε $x \in S$ και καθε $k = 3, \dots, n+1$ εχουμε

$$(-1)^{k-1} \det(BH_k(x)) > 0$$

οπου $BH(x)$ είναι ο πινακας διαστασεων $(n+1) \times (n+1)$

$$BH(x) = \begin{bmatrix} 0 & f'(x) \\ f'(x)^T & f''(x) \end{bmatrix}$$

$f'(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \text{jacobian of } f$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{bmatrix} = \text{hessian of } f$$

$BH_k(x) = 0$ πινακας που αποτελείται απο τις k πρωτες γραμμες και στηλες του $BH(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΙΟΝΕΙ ΚΟΙΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. cobb-douglas $f(x, y) = xy, x > 0, y > 0$,

- όχι κοίλη, διοτι

$$f\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 4 < 5 = \frac{1}{2}f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

- Οιονει κοιλη ,διοτι

ο περιφραγμενος εσσιανος πινακας ειναι

$$BH := \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με οριζουσα $2xy$, αρα η f ειναι οιονει κοιλη στο συνολο $x > 0, y > 0$, και συμφωνα με το κριτηριο 7.

2. $f(x) = x^2, x > 0$

- οχι κοιλη ,διοτι $f''(x) = 2 > 0$
- Οιονει κοιλη ,διοτι αυξουσα

3. $f(x) = 1 - \sqrt{2x - x^2}, 0 \leq x \leq 1$

- οχι κοιλη ,διοτι $f''(x) = x^{-\frac{3}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}} > 0$
- Οιονει κοιλη ,διοτι φθινουσα

4. cobb-douglas $f(x, y) = x^a y^b, x > 0, y > 0$, οπου το a, b ειναι παραμετροι, $0 \leq a, 0 \leq b, a + b > 1$

- οχι κοιλη ,διοτι

$$Hessian := \begin{bmatrix} x^{(a-2)} a y^b (a-1) & x^{(a-1)} a y^{(b-1)} b \\ x^{(a-1)} a y^{(b-1)} b & x^a y^{(b-2)} b (b-1) \end{bmatrix}$$

$$\det(Hessian) := - \frac{(x^a)^2 a (y^b)^2 b (a+b-1)}{x^2 y^2} < 0$$

- Οιονει κοιλη ,διοτι

$$bordered_hessian := \begin{bmatrix} 0 & x^{(a-1)} a y^b & x^a y^{(b-1)} b \\ x^{(a-1)} a y^b & x^{(a-2)} a y^b (a-1) & x^{(a-1)} a y^{(b-1)} b \\ x^a y^{(b-1)} b & x^{(a-1)} a y^{(b-1)} b & x^a y^{(b-2)} b (b-1) \end{bmatrix}$$

$$(-1)^2 \det(\text{bordered_hessian}) := x^{(3a-2)} y^{(3b-2)} a b (a+b) > 0$$

Η, με άλλο κριτήριο,

- Οιονει κοιλη ,διοτι $x^a y^b = \left(x^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{b}{a+b}} \right)^{a+b}$ =αυξων μετασχηματισμος κοιλης συναρτησης.

5.constant elasticity of substitution(CES) $f(x,y) = (x^r + y^r)^{1/r}$, $x > 0, y > 0$, οπου το r ειναι παραμετρος, $r > 1$,

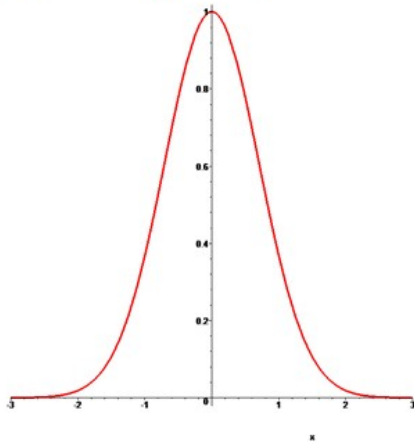
- Οχι οιονει κοιλη διοτι

$$(-1)^2 \det(\text{bordered_hessian}) = - \frac{A^{\left(\frac{3}{r}\right)} (r-1) (x^{(2r)} y^r + y^{(2r)} x^r)}{A^3 x^2 y^2} < 0$$

$$\text{οπου } A = x^r + y^r$$

6.bell curve

$$f(x) = \exp(-x^2), x \in R$$



- οχι κοιλη ,διοτι η δευτερη παραγωγος ειναι θετικη για $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f''(x) = 2e^{(-x^2)} (-1 + 2x^2)$$

- οιονει-κοιλη διοτι η πρωτη παραγωγος $f'(x) = -2x \exp(-x^2)$ ειναι θετικη για $x < 0$,αρνητικη για $x > 0$