ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Τεχνητή Νοημοσύνη

10η διάλεξη (2023-24)

Ίων Ανδρουτσόπουλος
http://www.aueb.gr/users/ion/

Τι θα ακούσετε σήμερα

- Σημασιολογία πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.

Υπενθύμιση: συντακτικό ΠΚΛ

τύπος → *ατομικός_τύπος*
| (*τύπος σύνδεσμος τύπος*)
| *ποσοδείκτης μεταβλητή τύπος*
| ¬*τύπος*

ατομικός_τύπος → *σύμβολο_σχέσης*(*όρος*, ...) | *όρος* = *όρος*

όρος → *σταθερά* | *μεταβλητή* |
σύμβολο_συνάρτησης(*όρος*, ...)

σύνδεσμος → $\wedge$ | $\vee$ | $\Rightarrow$ | $\Leftrightarrow$

ποσοδείκτης → $\forall$ | $\exists$

σταθερά → A | X_1 | John | Mary | ...

μεταβλητή → a | x | s | ...

σύμβολο_σχέσης → IsFatherOf | HasColor | IsKing | ...

σύμβολο_συνάρτησης → FatherOf | LeftLeg | ...

Τα σύνολα των σταθερών, μεταβλητών, συμβόλων σχέσεων, συμβόλων συναρτήσεων θεωρούμε ότι είναι ανά δύο ξένα.

Μοντέλα της ΠΚΛ

- Η ΠΚΛ θεωρεί ότι ο κόσμος αποτελείται από **αντικείμενα** και **σχέσεις**.
  - **Αντικείμενα**: συγκεκριμένοι άνθρωποι, σπίτια, χρώματα, αριθμοί, αιώνες...
  - **Σχέσεις**: η σχέση αδελφού, ιδιοκτησίας, ...
- Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις **σχέσεις ως σύνολα από *n*-άδες** αντικειμένων του κόσμου.
  - Η σχέση αδελφού (σχέση 2 ορισμάτων):

    { < Γιάννης, Μαρία >, < Γιώργος, Άννα >, ...}
  - Η σχέση που συνδέει τους γονείς με κάθε τους παιδί (σχέση 3 ορισμάτων):

    { < Γιάννης, Μαρία , Άννα >, < Γιάννης, Μαρία, Δημήτρης>,
    < Γιώργος, Άννα , Κώστας>, ...}
- **Ιδιότητες**: π.χ. η ιδιότητα να είναι κάποιος άνθρωπος, έξυπνος, ...
  - Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις ιδιότητες ως **σχέσεις ενός ορίσματος**, επομένως ως σύνολα αντικειμένων (1-άδων).
  - Η ιδιότητα άνθρωπος: { Γιάννης, Μαρία , Άννα, Γιώργος, ...}

Μοντέλα της ΠΚΛ – συνέχεια

- Κάποιες από τις σχέσεις είναι **συναρτήσεις**.
  - Αν μια σχέση είναι συνάρτηση, **δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός αποτελέσματα** για τα ίδια υπόλοιπα ορίσματα.
  - Η συνάρτηση μιας μεταβλητής που επιστρέφει τον πατέρα κάθε ανθρώπου (σχέση 2 ορισμάτων, το 2ο όρισμα είναι το αποτέλεσμα):

    {< Γιάννης, Γιώργος>, < Άννα, Γιώργος>, ...}
  - Η συνάρτηση δύο μεταβλητών που επιστρέφει το <u>πρώτο</u> παιδί δύο γονέων (σχέση 3 ορισμάτων, το 3ο είναι το αποτέλεσμα):

    { < Γιάννης, Μαρία , Άννα >, < Γιώργος, Άννα, Δημήτρης>, ...}
- Κάθε **μοντέλο** της ΠΚΛ αποτελείται από τα αντικείμενα και τις σχέσεις ενός κόσμου.
  - Το μοντέλο είναι μια αφηρημένη παράσταση του κόσμου.
- Οι **λογικές υψηλότερου βαθμού** (higher order logics) επιτρέπουν και σχέσεις μεταξύ σχέσεων (και ιδιότητες σχέσεων).
  - Δηλαδή επιτρέπουν οι σχέσεις να χρησιμοποιηθούν και ως αντικείμενα.

Μοντέλα της ΠΚΛ – συμβολισμοί

- **D**: το σύνολο όλων των **αντικειμένων** του κόσμου.
- $\mathbf{R_n}$: το σύνολο όλων των **σχέσεων** n ορισμάτων του κόσμου.
  - Μια σχέση είναι ένα σύνολο n-άδων αντικειμένων του D.
  - R_1: οι **ιδιότητες** του κόσμου (σχέσεις ενός ορίσματος).
- $\mathbf{F_n}$: Το υποσύνολο του R_{n+1} που είναι **συναρτήσεις**.
  - Συναρτήσεις n μεταβλητών (το n+1-στό όρισμα της σχέσης είναι το αποτέλεσμα της συνάρτησης).
  - Π.χ. η συνάρτηση που επιστρέφει το πρώτο παιδί δύο γονέων (συνάρτηση δύο μεταβλητών) $\in F_2 \subset R_3$.

Ερμηνεία της ΠΚΛ

- Μια ερμηνεία της ΠΚΛ καθορίζει τι παριστάνουν τα σύμβολα της ΠΚΛ σε έναν κόσμο.
  - Η ερμηνεία είναι μια συνάρτηση **i** από **σύμβολα** της ΠΚΛ σε **στοιχεία του μοντέλου**.
- Απεικονίζει:
  - Κάθε **σταθερά** σε ένα **στοιχείο του D** (σε ένα αντικείμενο).
  - Π.χ. τη σταθερά John στο αντικείμενο Γιάννης.
  - Κάθε **σύμβολο σχέσης** n ορισμάτων σε ένα **στοιχείο του** $\mathbf{R_n}$ (σε μια σχέση n ορισμάτων, σύνολο n-άδων αντικειμένων).
  - Π.χ. το IsBrotherOf στη σχέση { < Γιάννης, Μαρία >, < Γιώργος, Άννα >, ...} του R_2.
  - Κάθε **σύμβολο συνάρτησης** n μεταβλητών σε ένα **στοιχείο του** $\mathbf{F_n}$ (σε μία συνάρτηση n μεταβλητών).
  - Π.χ. το FirstDaughterOf στη συνάρτηση

    { < Γιάννης, Μαρία , Άννα >, ...}.

Ανάθεση τιμών

- Μια ανάθεση τιμών καθορίζει **τι παριστάνουν οι μεταβλητές** της ΠΚΛ.
  - Η ερμηνεία δεν το καθορίζει αυτό.
  - Η ανάθεση τιμών είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει **κάθε μεταβλητή** της ΠΚΛ **σε ένα αντικείμενο** του D.
  - Π.χ. την x στο αντικείμενο 🚹 Γιάννης.
- Συμβολισμός που θα μας χρειαστεί:
  - Αν g είναι μια ανάθεση τιμών, τότε με **g[β→ο]** συμβολίζουμε μια άλλη ανάθεση τιμών, που είναι η ίδια με την g εκτός του ότι απεικονίζει τη μεταβλητή β στο αντικείμενο ο.
  - Π.χ. η g[y→ 🚺 Μαρία] είναι ακριβώς ίδια με την g, αλλά απεικονίζει την y στο αντικείμενο 🚺 Μαρία.
- Θεωρούμε ότι κάθε ποσοδείκτης εισάγει τη δική του μεταβλητή. (Απλοποιεί τον ορισμό της ανάθεσης τιμών.)

Σημασιολογία ΠΚΛ

- $||\xi||^{i,g}$: η σημασία της έκφρασης ξ με την ερμηνεία i και την ανάθεση τιμών g. (Παραλείπουμε το M για συντομία.)
- Αν κ **σταθερά**, $||\boldsymbol{\kappa}||^{\mathbf{i,g}} = i(\kappa)$.
- Αν β **μεταβλητή**, $||\boldsymbol{\beta}||^{\mathbf{i,g}} = g(\beta)$.
- Αν τ_1, τ_2 **όροι**, $||\boldsymbol{\tau_1 = \tau_2}||^{\mathbf{i,g}} = T$ (αληθές) αν $||\tau_1||^{i,g} = ||\tau_2||^{i,g}$. Διαφορετικά F (ψευδές).
- Αν φ τύπος, $||\boldsymbol{\neg\varphi}||^{\mathbf{i,g}} = T$ αν $||\varphi||^{i,g} = F$. Διαφορετικά F.
- Αντίστοιχα οι ορισμοί για:
  – $||(\varphi \wedge \psi)||^{i,g}$, $||(\varphi \vee \psi)||^{i,g}$, $||(\varphi \Rightarrow \psi)||^{i,g}$, $||(\varphi \Leftrightarrow \psi)||^{i,g}$.
  – Όπως στην προτασιακή λογική.

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- Αν $\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ **ατομικός τύπος**,
  - $||\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau_1}, \ldots, \boldsymbol{\tau_n})||^{\mathbf{i,g}} = T$, αν $<||\tau_1||^{i,g}, \ldots, ||\tau_n||^{i,g}> \in i(\sigma)$.
  - Διαφορετικά F.
- Π.χ. ποια είναι η σημασία του IsBrotherOf(John, x);

σ τ1 τ2

i(IsBrotherOf)

{ < Γιάννης, Μαρία >,
< Γιώργος, Άννα >, ...}

$||\text{John}||^{\mathbf{i,g}} =$ i(John)

Γιάννης

$||\text{x}||^{\mathbf{i,g}} =$ g(x)

Μαρία

- Εξετάζουμε αν το $< ||\text{John}||^{i,g}, ||\text{x}||^{i,g}> \in$ i(IsBrotherOf), δηλαδή αν το < Γιάννης, Μαρία> ∈ i(IsBrotherOf).

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- Αν $\rho(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ **συναρτησιακός όρος**, τότε
  - $\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\tau_1}, \ldots, \boldsymbol{\tau_n})\|^{\mathbf{i,g}} = \mathrm{o}$,
  - όπου $<\|\tau_1\|^{i,g}, \ldots, \|\tau_n\|^{i,g}, \mathrm{o}> \in i(\rho)$.
- Π.χ. ποια είναι η σημασία του $\overset{\rho}{\text{FatherOf}}(\overset{\tau_1}{\text{Mary}})$

i(FatherOf)

$\|\text{Mary}\|^{\mathbf{i,g}}$ = i(Mary)

{ < Μαρία, $\overset{\mathrm{o}}{\text{Γιάννης}}$ >, < Άννα, Νίκος >, ...}

Μαρία

Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

Πρέπει ο *φ* να αληθεύει όποιο αντικείμενο *ο* κι αν παριστάνει η μεταβλητή *β*.

- Αν β μεταβλητή και φ τύπος, τότε:
  - $||\forall \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\varphi}||^{\mathbf{i,g}} = \mathrm{T}$, αν για κάθε ο $\in$ D, $||\boldsymbol{\varphi}||^{\mathbf{i,\ g[\beta \to o]}} \mathbf{= T}$.
  - $||\exists \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\varphi}||^{\mathbf{i,g}} = \mathrm{T}$, αν για κάποιο ο $\in$ D, $||\boldsymbol{\varphi}||^{\mathbf{i,\ g[\beta \to o]}} \mathbf{= T}$.
  - Διαφορετικά F.

Πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο *ο*, ώστε όταν το παριστάνει η *β* να αληθεύει ο *φ*.

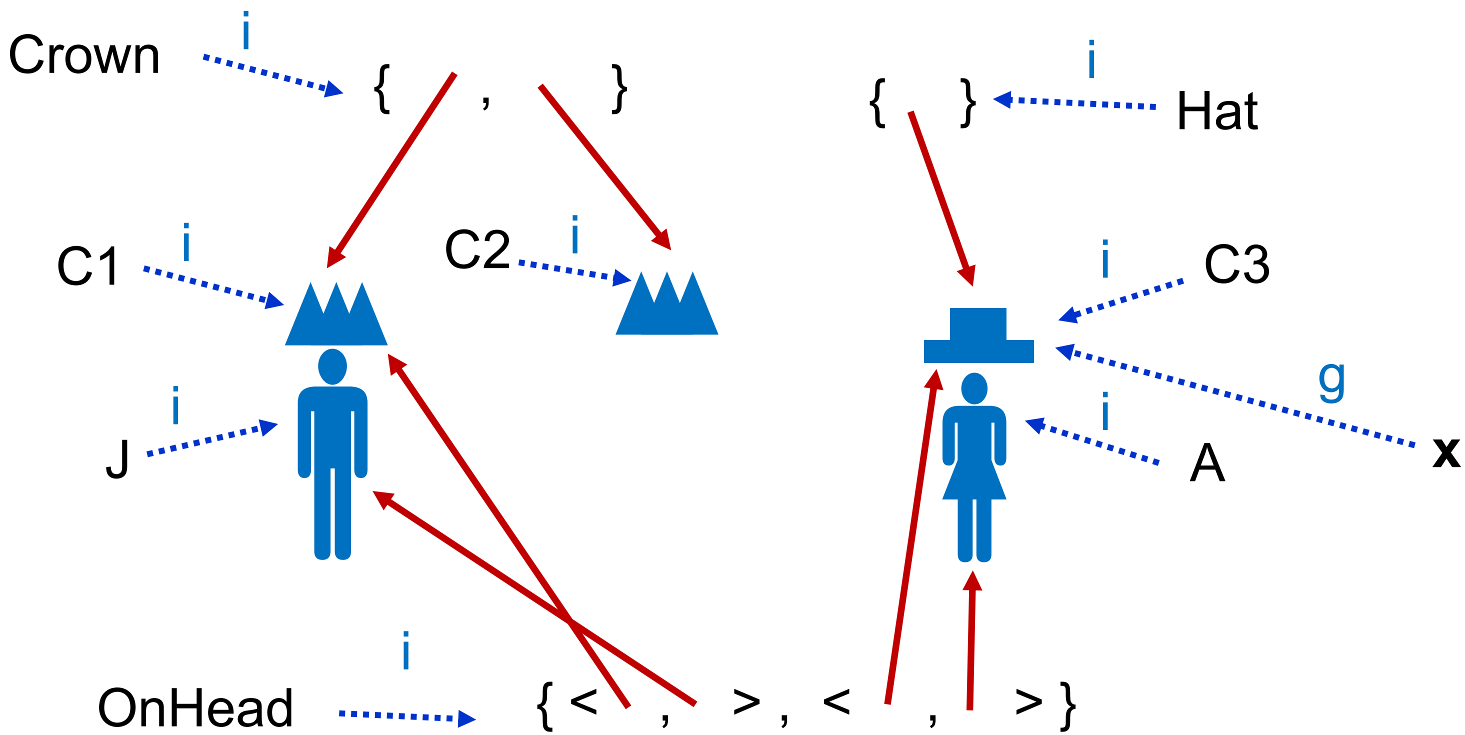
Σημασιολογία ΠΚΛ – συνέχεια

- **Ελεύθερη μεταβλητή**:
  - Εμφάνιση μεταβλητής που δε βρίσκεται μέσα στην **εμβέλεια** ποσοδείκτη που την εισάγει.

    Ελεύθερες μεταβλητές.
  - Π.χ. $\forall x_1$ (IsCat(x_1) $\Rightarrow$ Likes(x_1, $\mathbf{x_2}$))

    Δεν είναι ελεύθερη.
  - Π.χ. $\exists x_1$ (IsCat(x_1) $\wedge$ (IsDog($\mathbf{x_2}$) $\Rightarrow$ $\forall x_2$ (Likes(x_1, $\mathbf{x_2}$))))
- Για την παράσταση γνώσεων, θα χρησιμοποιούμε τύπους **χωρίς ελεύθερες** μεταβλητές.
  - Αν ένας τύπος φ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε το $||\varphi||^{\mathbf{i,g}}$ δεν εξαρτάται από την ανάθεση τιμών g.
  - Γράφουμε απλά $||\boldsymbol{\varphi}||^{\mathbf{i}}$.

Παράδειγμα

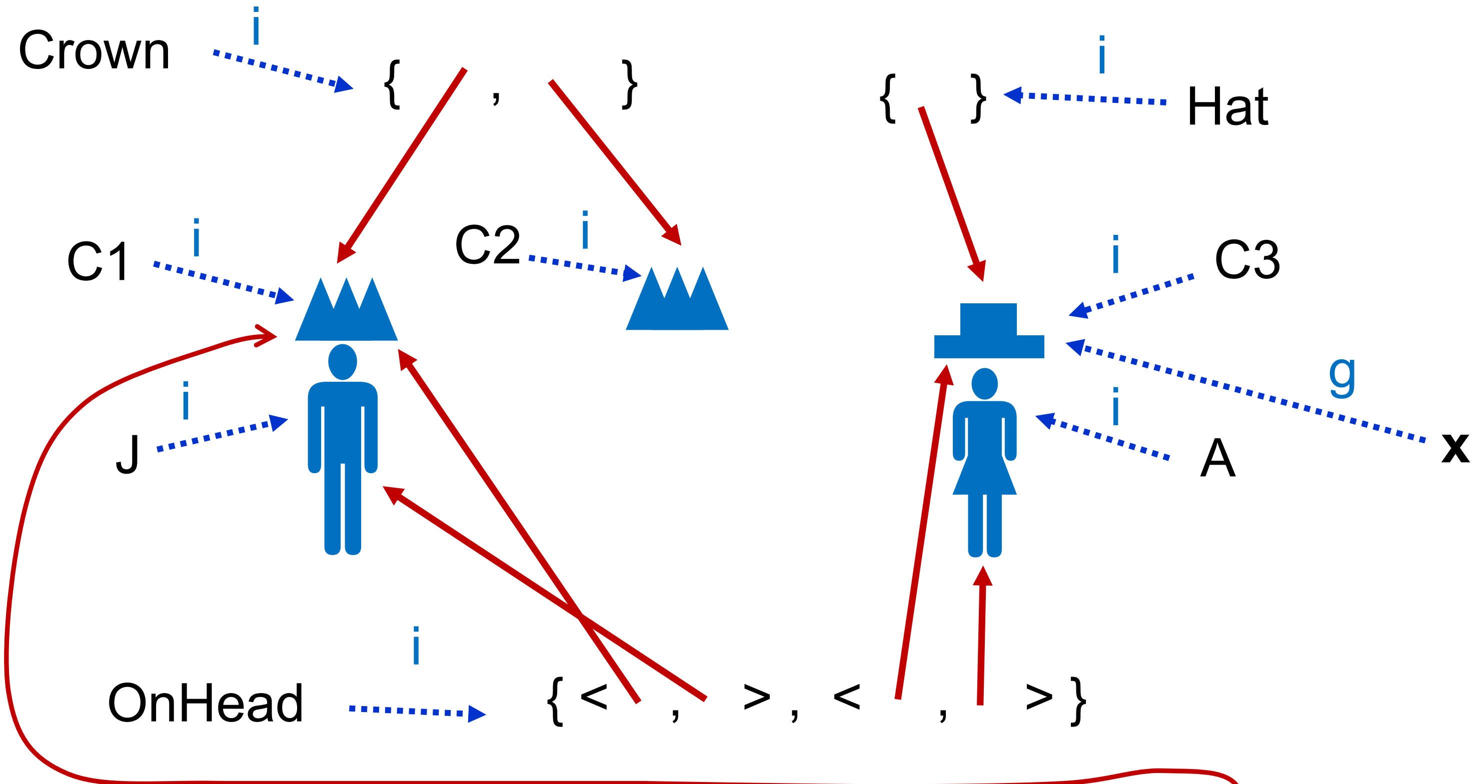


$$\| \, (\mathrm{Crown}(C1) \wedge \mathrm{OnHead}(C1, J)) \, \|^{i} = T$$

$$\| \, (\mathrm{Crown}(C2) \wedge \mathrm{OnHead}(C2, J)) \, \|^{i} = F$$

$$\| \, (\mathrm{Hat}(C3) \wedge \mathrm{OnHead}(C3, A)) \, \|^{i} = T$$

Παράδειγμα – συνέχεια



$$\| \, (\, Crown(x) \wedge OnHead(x, J) \,) \, \|^{i,g} = F$$

$$\| \, (\, Crown(x) \wedge OnHead(x, J) \,) \, \|^{i,g[x \rightarrow o]} = \mathbf{T}$$

$$\| \, \exists x \, (Crown(x) \wedge OnHead(x, J) \,) \, \|^{i} = \mathbf{T}$$

Τι σημαίνει ψ $\models$ φ στην ΠΚΛ;

- Στην ΠΚΛ, ψ $\models$ φ σημαίνει:

  Για κάθε M, i, g:

  αν $||\psi||^{M, i, g} = T$, τότε και $||\varphi||^{M, i, g} = T$.

- Αντίστοιχα στην ΠΚΛ, ψ ≡ φ σημαίνει:

  ψ $\models$ φ και φ $\models$ ψ

  ή (ισοδύναμος ορισμός):

  Για κάθε M, i, g:

  $||\psi||^{M, i, g} = T$ αν και μόνο αν $||\varphi||^{M, i, g} = T$.

Βιβλιογραφία

- Russel & Norvig (4η έκδοση): ενότητα 8.2 ως και υπο-ενότητα 8.2.7.
    - Όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να διαβάσουν προαιρετικά και τις υπόλοιπες ενότητες του κεφαλαίου 8.
- Βλαχάβας κ.ά: ενότητα 9.2.1 (χωρίς τα περί ενοποίησης). Ο όρος «μοντέλο» χρησιμοποιείται σε αυτές τις διαφάνειες με άλλο νόημα.