Τεχνητή Νοημοσύνη

3ο φροντιστήριο (2023-24)

Επιμέλεια: Σοφία Ελευθερίου,
Φοίβος Χαραλαμπάκος

Ταυτολογική συνεπαγωγή

- $\alpha \vDash \beta$ σημαίνει:
  - Σε κάθε μοντέλο όπου είναι αληθής ο τύπος α, είναι αληθής και ο τύπος β.
- Έγκυρος τύπος ή ταυτολογία
  - Τύπος που αληθεύει σε κάθε μοντέλο.

Άσκηση 8.1

i) Έστω ότι α και β είναι δύο τύποι της προτασιακής λογικής. Αποδείξτε ότι $\alpha \vDash \beta$ αν και μόνο αν ο τύπος $(\alpha \Rightarrow \beta)$ είναι έγκυρος (ταυτολογία).

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

α) $(\alpha \Rightarrow \beta)$ έγκυρος: Περιοριζόμενοι στους συνδυασμούς τιμών των γραμμών (1), (3) και (4), παρατηρούμε ότι όποτε (σε όποιο μοντέλο) αληθεύει ο α, αληθεύει και ο β. Οπότε $\alpha \vDash \beta$.

β) Έστω $\alpha \vDash \beta$: Σε κάθε μοντέλο όπου αληθεύει ο α, αληθεύει και ο β. Άρα για κάθε μοντέλο, βρισκόμαστε (ξανά) σε μία από τις περιπτώσεις (1), (3) ή (4), όπου ο τύπος $(\alpha \Rightarrow \beta)$ είναι αληθής. Άρα ο $(\alpha \Rightarrow \beta)$ είναι αληθής σε κάθε μοντέλο και επομένως είναι έγκυρος.

Άσκηση 8.1

ii) Αποδείξτε την ορθότητα του κανόνα Modus Ponens:$\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha\} \vDash \beta$

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

Όταν η πρόταση $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha)$ είναι αληθής, τότε είναι και η πρόταση β αληθής.
Άρα $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha\} \vDash \beta$. Συνεπώς, ο κανόνας Modus Ponens είναι ορθός.

Άσκηση 8.1

iii) Αποδείξτε την ορθότητα του κανόνα Modus Tollens: $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \vDash \neg\alpha$

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg\beta$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\neg\alpha$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Όταν η πρόταση $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta)$ αληθεύει, τότε αληθεύει και η ¬α.
Άρα $(\alpha \Rightarrow \beta \wedge \neg\beta) \vDash$ ¬α. Άρα ο κανόνας Modus Tollens είναι ορθός.

Άσκηση 8.1

iv) Ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός για k = 1; Για n = 1; Για k = n = 1;

Κανόνας ανάλυσης:

$$\{l_1 \vee \cdots \vee l_k, m_1 \vee \cdots \vee m_n\} \vdash l_1 \vee \cdots l_{i-1} \vee l_{i+1} \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \cdots m_{j-1} \vee m_{j+1} \ldots \vee m_n$$

όπου $l_i = \neg m_j$

Για $k = 1$ ο κανόνας ανάλυσης γίνεται

$$\{l_1, m_1 \vee \cdots \vee m_n\} \vdash m_1 \vee \cdots m_{j-1} \vee m_{j+1} \ldots \vee m_n$$

όπου $l_1 = \neg m_j$.

Έστω μοντέλο στο οποίο οι τύποι l_1 και $m_1 \vee \cdots \vee m_n$ είναι αληθείς.

Τότε αφού $l_1 = \neg m_j$ ο τύπος m_j θα είναι ψευδής.

Άρα, αφού $m_1 \vee \cdots \vee m_n$ αληθής, θα αληθεύει κάποιος άλλος τύπος εκτός του m_j.

Οπότε $m_1 \vee \cdots m_{j-1} \vee m_{j+1} \ldots \vee m_n$ αληθής.

Άσκηση 8.1

iv) Ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός για k = 1; Για n = 1; Για k = n = 1;

Για $n = 1$ ο κανόνας ανάλυσης γίνεται

$$\{l_1 \vee \cdots \vee l_k, m_1\} \vdash l_1 \vee \cdots l_{i-1} \vee l_{i+1} \ldots \vee l_k$$

όπου $l_i = \neg m_1$.
Έστω μοντέλο στο οποίο οι τύποι $l_1 \vee \cdots \vee l_k$ και m_1 είναι αληθείς.
Τότε αφού $l_i = \neg m_1$ ο τύπος l_i θα είναι ψευδής.
Άρα, αφού $l_1 \vee \cdots \vee l_k$ αληθής, θα αληθεύει κάποιος άλλος τύπος εκτός του l_i.
Οπότε $l_1 \vee \cdots l_{i-1} \vee l_{i+1} \ldots \vee l_k$αληθής.

Άσκηση 8.1

iv) Ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός για k = 1; Για n = 1; Για k = n = 1;

Για k $= n = 1$ ο κανόνας ανάλυσης γίνεται

$$\{l_1, m_1\} \vdash \square$$

όπου $l_1 = \neg m_1$ και $\square$ η κενή διάζευξη.

Για να μην ήταν ορθός θα έπρεπε να μπορώ να βρω ένα μοντέλο στο οποίο οι τύποι l_1 και m_1 να είναι αληθείς και η κενή διάζευξη ψευδής που δεν γίνεται.

Άσκηση 8.2

α) Μετατρέψτε την ακόλουθη βάση γνώσης (ΒΓ) σε κανονική συζευκτική μορφή (CNF), δείχνοντας αναλυτικά τα βήματα της μετατροπής

Κανονική συζευκτική μορφή (CNF):

$$(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,k_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee \cdots \vee l_{n,k_2})$$

$\neg B_{1,1}$ (είναι σε κανονική μορφή)

$$\left(B_{1,1} \Leftrightarrow P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \equiv$$
$$\left(B_{1,1} \Rightarrow P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(P_{1,2} \vee P_{2,1} \Rightarrow B_{1,1}\right) \equiv$$
$$\left(\neg B_{1,1} \vee \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)\right) \wedge \left(\neg\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \vee B_{1,1}\right) \equiv$$
$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\left(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}\right) \vee B_{1,1}\right) \equiv$$
$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\left(\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}\right) \wedge \left(\neg P_{2,1} \vee B_{1,1}\right)\right) \equiv$$
$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}\right) \wedge \left(\neg P_{2,1} \vee B_{1,1}\right)$$

Άσκηση 8.2

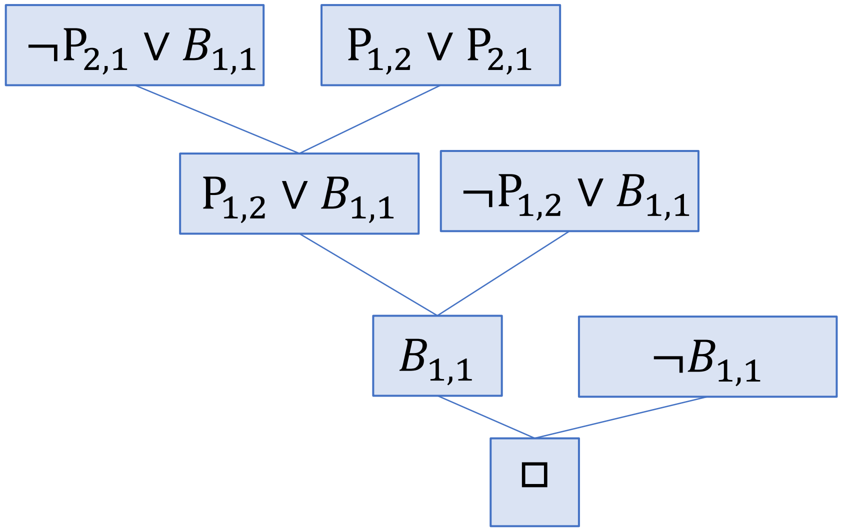
β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ανάλυσης (resolution), αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο ότι ΒΓ $\vDash \neg \mathrm{P}_{1,2} \wedge \neg \mathrm{P}_{2,1}$, όπου ΒΓ η βάση γνώσης του σκέλους (α) σε CNF. Σχεδιάστε το δέντρο της απόδειξης.

$$\mathrm{B\Gamma} = \left\{\neg B_{1,1}, \quad \neg B_{1,1} \vee \mathrm{P}_{1,2} \vee \mathrm{P}_{2,1}, \quad \neg \mathrm{P}_{1,2} \vee B_{1,1}, \quad \neg \mathrm{P}_{2,1} \vee B_{1,1}\right\}$$

Προσθέτουμε την άρνηση του ζητουμένου στη βάση γνώσης. Δηλαδή τον τύπο

$$\neg\left(\neg \mathrm{P}_{1,2} \wedge \neg \mathrm{P}_{2,1}\right) \equiv \mathrm{P}_{1,2} \vee \mathrm{P}_{2,1}$$

Οπότε προκύπτει το δέντρο απόδειξης:



Άσκηση 8.3

Εξηγήστε πώς θα μπορούσε ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας ενός τύπου προτασιακής λογικής που βρίσκεται σε κανονική συζευκτική μορφή (CNF) να γίνει με αναζήτηση A*.

Τι θα παρίστανε κάθε κατάσταση και πώς ακριβώς;
Θα παρίστανε μια ανάθεση τιμών στα σύμβολα (ατομικές προτάσεις, εκτός από τις ειδικές True, False) του τύπου. Κάθε κατάσταση θα συμβολιζόταν με ένα διάνυσμα με τόσες συνιστώσες όσες και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Η τιμή κάθε συνιστώσας θα ήταν T (αληθές) ή F (ψευδές).

Ποια θα ήταν η αρχική κατάσταση;
Η αρχική κατάσταση θα αντιστοιχούσε σε τυχαία ανάθεση τιμών στα σύμβολα του τύπου.

Πώς θα προέκυπταν τα παιδιά κάθε κατάστασης;
Τα παιδιά θα μπορούσαν να παριστάνουν π.χ. όλες τις νέες αναθέσεις τιμών που προκύπτουν μεταβάλλοντας σε κάθε μία νέα ανάθεση την τιμή ενός μόνο συμβόλου, σε σχέση με τις τιμές της τρέχουσας κατάστασης. Έτσι κάθε κατάσταση θα είχε πάντα τόσα παιδιά όσα και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Επομένως και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης θα ήταν πεπερασμένος.

Ποια θα μπορούσε να ήταν η ευρετική συνάρτηση;
Η ευρετική θα μπορούσε να ήταν ο αριθμός των διαζεύξεων του CNF τύπου που δεν αληθεύουν με την ανάθεση τιμών της αξιολογούμενης κατάστασης

Θα ήταν «αποδεκτή»; Ναι ή όχι και γιατί; Θεωρήστε ότι το κόστος κάθε μετάβασης είναι 1 και ότι το κόστος ενός μονοπατιού ισούται με τον αριθμό μεταβάσεών του.
Η ευρετική αυτή δεν είναι αποδεκτή. Μπορεί π.χ. με την ανάθεση τιμών μιας αξιολογούμενης κατάστασης να υπάρχουν δύο διαζεύξεις που δεν αληθεύουν και αλλάζοντας τιμή σε ένα μόνο σύμβολο (κάνοντας μόνο μία μετάβαση) να αληθεύουν πλέον όλες οι διαζεύξεις, δηλαδή να έχουμε φτάσει σε τελική κατάσταση. Επομένως, η τιμή (2) που είχε επιστρέψει η ευρετική στην προηγούμενη κατάσταση ήταν υπερ-εκτίμηση (όχι υπο-εκτίμηση όπως θα έπρεπε) της απόστασης (του αριθμού μεταβάσεων) ως την πλησιέστερη τελική κατάσταση.

Αν η ευρετική που προτείνατε είναι αποδεκτή, τι μας εξασφαλίζει αυτό;
Αν η ευρετική ήταν αποδεκτή, θα ήμασταν σίγουροι ότι ο A* θα έβρισκε πάντα το βέλτιστο μονοπάτι. Η ευρετική που χρησιμοποιούμε, όμως, δεν είναι αποδεκτή και έτσι δεν έχουμε εγγύηση ότι ο A* θα βρίσκει πάντα το βέλτιστο μονοπάτι.

Αν δεν είναι, έχει αυτό κάποια σημαντική επίπτωση στον έλεγχο ικανοποιησιμότητας;;
Στον έλεγχο ικανοποιησιμότητας, όμως, αυτό δεν είναι σημαντικό, γιατί δεν μας ενδιαφέρει να βρίσκει το βέλτιστο μονοπάτι· μας ενδιαφέρει μόνο αν υπάρχει ή όχι τελική κατάσταση, δηλαδή ανάθεση τιμών που ικανοποιεί τον τύπο.

Είναι σίγουρο πως αν ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος, ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας θα τερματίσει και θα αποκριθεί θετικά; Ναι ή όχι και γιατί;
Ναι, γιατί ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος (βλ. παραπάνω) και το κόστος κάθε μετάβασης είναι 1. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι ο A* είναι πλήρης. Επομένως, αν ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος, δηλαδή αν υπάρχει τελική κατάσταση (ανάθεση τιμών με την οποία αληθεύει ο τύπος), ο A* θα την βρει (σε πεπερασμένο χρόνο) και επομένως ο έλεγχος θα τερματίσει με θετική απόκριση

Άσκηση 8.4

α) Κάθε τύπος προτασιακής λογικής μπορεί να μετατραπεί σε κανονική συζευκτική μορφή;

Ναι και μάλιστα ο νέος τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό.

β) Αν διαθέτουμε αλγόριθμο που αποκρίνεται πάντα αν ένας τύπος προτασιακής λογικής είναι ή δεν είναι ικανοποιήσιμος μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να απαντήσουμε αν ένας τύπος β έπεται ταυτολογικά από έναν άλλο τύπο α (α ⊨ β) ή όχι;

Η ταυτολογική συνεπαγωγή $\alpha \vDash \beta$ είναι ισοδύναμη με το να είναι ο τύπος $\alpha \wedge \neg\beta$ μη ικανοποιήσιμος.

Οπότε εκτελούμε τον αλγόριθμο με είσοδο τον τύπο $\alpha \wedge \neg\beta$ και

- Αν ο αλγόριθμος αποκριθεί θετικά τότε ο α δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον β.
- Αν ο αλγόριθμος αποκριθεί αρνητικά τότε $\alpha \vDash \beta$.

Άσκηση 8.4

γ) Εξηγήστε πώς θα μπορούσε να γίνει ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας ενός τύπου προτασιακής λογικής που βρίσκεται σε κανονική συζευκτική μορφή χρησιμοποιώντας αναρρίχηση λόφου.

γ1) Τι θα παρίστανε κάθε κατάσταση και πώς ακριβώς;

Θα παρίστανε μια ανάθεση τιμών στα σύμβολα (ατομικές προτάσεις, εκτός από τις ειδικές True, False) του τύπου. Κάθε κατάσταση θα ήταν ένα διάνυσμα με τόσες συνιστώσες όσες και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Η τιμή κάθε συνιστώσας θα ήταν True ή False.

γ2) Ποια θα ήταν η αρχική κατάσταση;

Μια τυχαία ανάθεση τιμών στα σύμβολα του τύπου.

γ3) Πώς θα προέκυπταν τα παιδιά κάθε κατάστασης;

Τα παιδιά θα μπορούσαν να παριστάνουν π.χ. όλες τις νέες αναθέσεις τιμών που προκύπτουν μεταβάλλοντας σε κάθε μία νέα ανάθεση την τιμή ενός μόνο συμβόλου, σε σχέση με τις τιμές της τρέχουσας κατάστασης. Έτσι κάθε κατάσταση θα είχε πάντα τόσα παιδιά όσα και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου.

Άσκηση 8.4

γ4) Ποια θα ήταν η συνάρτηση αξιολόγησης των παιδιών;

Ο αριθμός των διαζεύξεων του CNF τύπου που αληθεύουν με την ανάθεση τιμών του αξιολογούμενου παιδιού.

γ5) Αν η αναζήτηση αναρρίχησης λόφου τελειώσει χωρίς να βρεθεί μοντέλο που ικανοποιεί τον τύπο, είναι σίγουρο ότι ο τύπος είναι μη ικανοποιήσιμος; Γιατί;

Όχι, γιατί μπορεί στην πραγματικότητα να υπάρχει ανάθεση τιμών (μοντέλο) που ικανοποιεί τον τύπο, αλλά η αναρρίχηση λόφου να μην το βρήκε επειδή παγιδεύτηκε σε τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα κώδικα

- Αλγόριθμος ανάλυσης (resolution)

Θέλω να εξετάσω αν ΒΓ $\models$ C

Ξεκινάω με ΒΓ∧¬C

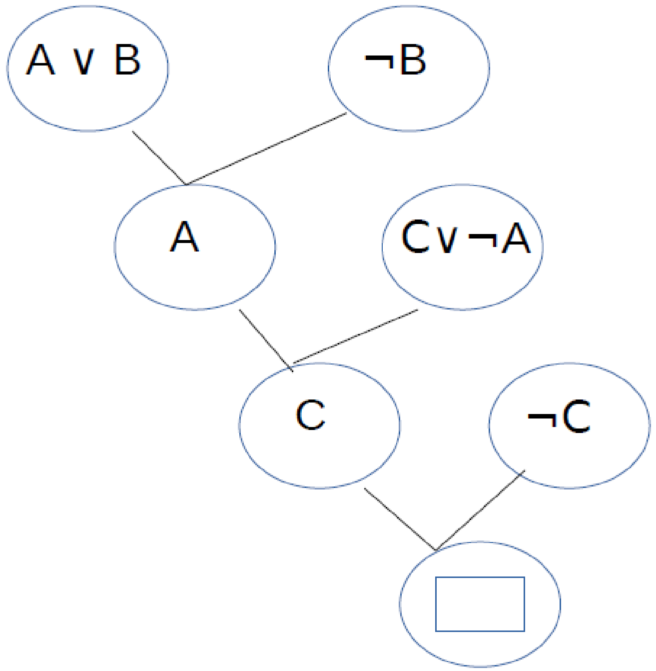
ΒΓ

A ∨ B
¬B
C∨¬A

ΒΓ

A ∨ B
¬B
C∨¬A
¬C

Clause: (A ∨ B)∧(¬B)∧(C∨¬A)∧(¬C)
Literals: A,B,C
SubClauses: (A ∨ B), (¬B), (C∨¬A), (¬C)



Άτοπο άρα ΒΓ $\vdash$ C