Τεχνητή Νοημοσύνη

1ο φροντιστήριο (2023-24)

Επιμέλεια: Σοφία Ελευθερίου,
Φοίβος Χαραλαμπάκος

Άσκηση 2.1α

- ∃ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης b είναι πεπερασμένος
- Σύνολο καταστάσεων πεπερασμένο.
- Το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους
- Χρησιμοποιούμε κλειστό σύνολο.
- Εκτελούμε BFS

I. Αποτέλεσμα του BFS;

II. Αν b όχι πεπερασμένο;

III. Αν το σύνολο καταστάσεων δεν είναι πεπερασμένο.

IV. Αν δεν είχαμε κλειστό σύνολο;

I. Ο αλγόριθμος, σε περίπτωση που σε κάποιο επίπεδο δεν υπάρχει τελική κατάσταση θα πρέπει να βρίσκει μια τουλάχιστον νέα κατάσταση. Διαφορετικά θα επαναλαμβάνονταν μη τελικές καταστάσεις ή θα τερμάτιζε αν έχουμε κλειστό σύνολο και το πρόβλημα δεν θα είχε λύση. Άρα, με δεδομένο ότι το σύνολο των καταστάσεων είναι πεπερασμένο και ο ότι ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι επίσης πεπερασμένος, ο αλγόριθμος θα βρίσκει πάντα τη λύση. Σε περίπτωση που το κόστος της λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους, η λύση θα είναι βέλτιστη.

II. Μπορεί να εγκλωβιστεί ο αλγόριθμος σε ένα επίπεδο

III. Μπορεί η λύση να είναι σε άπειρο βάθος οπότε δεν θα τερματίσει.

IV. Θα βρει τη λύση και πάλι αφού σε κάθε επίπεδο θα βρίσκει τουλάχιστον μια νέα κατάσταση και αφού το σύνολο των καταστάσεων είναι πεπερασμένο και υπάρχει λύση, θα την βρει.

Άσκηση 2.1β

- ∄ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης b είναι πεπερασμένος
- Σύνολο καταστάσεων πεπερασμένο.
- Δεν χρησιμοποιούμε κλειστό σύνολο
- Εκτελούμε BFS

I. **Αποτέλεσμα του BFS;**
II. **Αν b όχι πεπερασμένο;**
III. **Αν το σύνολο καταστάσεων δεν είναι πεπερασμένο;**
IV. **Αν είχαμε κλειστό σύνολο;**

I. Στην περίπτωση αυτή, αφού το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο, τα μόνα άπειρα κλαδιά που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στο δέντρο αναζήτησης αντιστοιχούν σε κύκλους του γράφου καταστάσεων. Δεν είναι, όμως, σίγουρο ότι θα εμφανιστούν τέτοια άπειρα κλαδιά, γιατί δεν είναι σίγουρο ότι έχει κύκλους ο γράφος καταστάσεων. Αν εμφανιστούν τέτοια άπειρα κλαδιά, ο BFS δεν θα μπορέσει να τα πριονίσει (να αποφύγει να εμπλακεί στις άπειρες επαναλήψεις των καταστάσεών τους), γιατί δεν χρησιμοποιείται κλειστό σύνολο επομένως, στην περίπτωση αυτή, θα υπάρχει πάντα, λόγω των άπειρων κλαδιών, ένα επόμενο πιο κάτω επίπεδο στο δέντρο αναζήτησης και, αφού δεν υπάρχει λύση, ο BFS θα αποφασίζει πάντα να το εξερευνήσει και αυτό, χωρίς ποτέ να τερματίζει. Διαφορετικά, αν δεν υπάρχουν άπειρα κλαδιά, αφού και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος, το δέντρο αναζήτησης που θα ψάξει ο BFS είναι πεπερασμένο και, αφού δεν υπάρχει λύση, ο BFS θα το ψάξει ολόκληρο και θα τερματίσει. Επομένως, ο BFS άλλοτε τερματίζει (αν δεν υπάρχουν άπειρα κλαδιά) και άλλοτε όχι (αν υπάρχουν).
II. Μπορεί να εγκλωβιστεί ο αλγόριθμος σε ένα επίπεδο.
III. Δεν θα τερματίσει αφού θα εξερευνά συνεχώς νέες καταστάσεις.
IV. Αφού δεν υπάρχει λύση, το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο και δεν επαναλαμβάνει καταστάσεις θα τερματίσει.

Άσκηση 3.1α

Σύγκριση χρονικής πολυπλοκότητας των αλγορίθμων BFS και DFS:

Η πολυπλοκότητα χρόνου του DFS είναι $O(b^m)$ αφού στη χειρότερη περίπτωση παράγονται

$$b + b^2 + \cdots + b^m$$

κόμβοι (πότε;)

Η πολυπλοκότητα χρόνου του του BFS είναι $O(b^{d+1})$ αφού στη χειρότερη περίπτωση παράγονται

$$b + b^2 + \cdots + b^d + b^{d+1} - b$$

κόμβοι (πότε;)

- Στη χειρότερη περίπτωση, ο DFS ψάχνει όλο το χώρο αναζήτησης, μέχρι το μέγιστο βάθος m, που μπορεί να είναι και άπειρο, ενώ ο BFS ψάχνει μέχρι ένα επίπεδο πιο κάτω από το βάθος d της ρηχότερης τελικής κατάστασης

Άσκηση 3.1β

Σύγκριση χωρικής πολυπλοκότητας των αλγορίθμων BFS και DFS

I. χωρίς κλειστό σύνολο.

II. με κλειστό σύνολο.

I. Η πολυπλοκότητα χώρου του DFS χωρίς κλειστό σύνολο είναι $O(bm)$ αφού στη χειρότερη περίπτωση έχουμε στη μνήμη έναν κόμβο βάθους m (μπορεί το m να είναι και άπειρο), τους προγόνους του που είναι m και τα παιδιά των προγόνων του που είναι b για κάθε έναν. Συμβαίνει όταν η εξερεύνηση βρίσκεται στο αριστερότερο φύλλο σε βάθος m. Η πολυπλοκότητα χώρου του του BFS χωρίς κλειστό σύνολο είναι $\mathrm{O}\left(b^{d+1}\right)$ (επίσης το d μπορεί να είναι άπειρο). Συμβαίνει όταν η λύση είναι στο δεξιότερο φύλλο σε βάθος d. Τελικά αν b, d, m πεπερασμένα καλύτερος είναι ο DFS.

II. Με κλειστό σύνολο ο BFS στην χειρότερη περίπτωση έχει πολυπλοκότητα χώρου $\mathrm{O}\left(b^{d+1}\right)$ ενώ ό DFS έχει $\mathrm{O}(b^{m})$ οπότε αν τα b, d και m είναι πεπερασμένα ο BFS έχει καλύτερη πολυπλοκότητα χώρου όταν $d+1<m$ δηλαδή όταν υπάρχει τελική κατάσταση που δεν είναι στο τελευταίο ή στο προτελευταίο επίπεδο του δέντρου αναζήτησης. Διαφορετικά έχουν την ίδια.

Άσκηση 3.1γ

- ∃ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος.
- Το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο.
- Χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο.
- Το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους.
- Εκτελούμε DFS

I. **Αποτέλεσμα του αλγόριθμου;**

II. **Αν ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης δεν ήταν πεπερασμένος;**

III. **Αν δεν είχαμε κλειστό σύνολο;**

I. Αφού χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο δεν επαναλαμβάνω καταστάσεις. Αφού το σύνολο των (δυνατών) καταστάσεων είναι πεπερασμένο και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος, το δέντρο αναζήτησης που θα ψάξει ο DFS είναι πεπερασμένο (πότε το δέντρο αναζήτησης μπορεί να μην είναι πεπερασμένο;) και ο DFS θα τερματίσει σίγουρα. Αφού υπάρχει λύση, θα την βρει. Η λύση που θα βρει μπορεί να μην είναι βέλτιστη, γιατί ενδέχεται να υπάρχει και άλλη τελική κατάσταση σε μικρότερο βάθος.

II. Μπορεί να μην τερματίσει αφού θα πρέπει να ελέγχει τα κλαδιά που παράγονται στο επίπεδο με τους άπειρους κόμβους.

III. Μπορεί να εγκλωβιστεί σε μονοπάτια που έχουν άπειρο μήκος και οι κόμβοι του επαναλαμβάνουν καταστάσεις.

Άσκηση 3.1δ

- ∄ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος
- Το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο
- Χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο
- Εκτελούμε DFS

Αποτέλεσμα του αλγορίθμου;

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, το δέντρο αναζήτησης που θα ψάξει ο DFS είναι πεπερασμένο. Αφού δεν υπάρχει λύση, άρα δεν υπάρχει και τελική κατάσταση, ο DFS απλά θα ψάξει ολόκληρο το (πεπερασμένο) δέντρο αναζήτησης και θα τερματίσει.

Άσκηση 3.1ε

Σύγκριση πολυπλοκότητας χώρου των αλγορίθμων αναζήτησης πρώτα σε πλάτος (BFS) και επαναληπτικής εκβάθυνσης (IDS). Θεωρούμε b, d πεπερασμένα.

I. χωρίς κλειστό σύνολο.

II. με κλειστό σύνολο.

- Αφού b, d πεπερασμένα, οι δύο αλγόριθμο θα τερματίσουν έχοντας βρει τη λύση.

I. Χωρίς κλειστό σύνολο, ο IDS έχει πολυπλοκότητα χώρου $O(bd)$ (πότε;), ενώ ο BFS έχει $\mathrm{O}\left(b^{d+1}\right)$. Επομένως, ο IDS έχει καλύτερη πολυπλοκότητα χώρου.

II. Με κλειστό σύνολο έχουν την ίδια πολυπλοκότητα χώρου $\mathrm{O}\left(b^{d+1}\right)$ αφού στην χειρότερη περίπτωση, δηλαδή όταν όλοι οι κόμβοι του δέντρου αναζήτησης αποτελούν διαφορετικές καταστάσεις, θα αποθηκευτούν στο κλειστό σύνολο όλες οι καταστάσεις μέχρι να βρεθεί η λύση.

Άσκηση 3.1στ

Σύγκριση πολυπλοκότητας χώρου των αλγορίθμων αναζήτησης πρώτα σε Βάθος (DFS) και επαναληπτικής εκβάθυνσης (IDS). Θεωρούμε b, d, m πεπερασμένα.

I. χωρίς κλειστό σύνολο

II. με κλειστό σύνολο.

I. Χωρίς κλειστό σύνολο, ο IDS έχει πολυπλοκότητα χώρου $O(bd)$, ενώ ο DFS έχει $O(bm)$. Επομένως, αφού θεωρούμε ότι τα b, d και m είναι πεπερασμένα και επειδή $d \leq m$, ο IDS έχει γενικά καλύτερη πολυπλοκότητα χώρου.

II. Με κλειστό σύνολο, χάνεται η γραμμικότητα της πολυπλοκότητας χώρου και στους δύο αλγορίθμους αφού στην χειρότερη περίπτωση θα αποθηκεύονται οι καταστάσεις όλων των κόμβων του δέντρου αναζήτησης. Ο DFS τότε θα έχει πολυπλοκότητα χώρου $O(b^m)$ ενώ ο IDS θα έχει $O(b^d)$ οπότε και πάλι είναι καλύτερος ο IDS.

Άσκηση 4.1α

Αποδείξτε ότι αν η h είναι συνεπής, τότε $\boldsymbol{h(n_1) \leq c(n_1 \to \ldots \to n_k) + h(n_k)}$, για οποιοδήποτε μονοπάτι $\boldsymbol{n_1 \to \ldots \to n_k}$

h συνεπής $\Leftrightarrow h(n) \leq c(n \to n') + h(n')$ για κάθε n, n'

$$
\begin{gathered}
h(n_1) \leq c(n_1 \to n_2) + h(n_2) \\
h(n_2) \leq c(n_2 \to n_3) + h(n_3) \\
h(n_3) \leq c(n_3 \to n_4) + h(n_4) \\
\ldots \\
h(n_{k-1}) \leq c(n_{k-1} \to n_k) + h(n_k)
\end{gathered}
$$

Με πρόσθεση κατά μέλη

$$h(n_1) \leq c(n_1 \to \ldots \to n_k) + h(n_k)$$

Άσκηση 4.1β

Αποδείξτε ότι κάθε συνεπής h είναι και αποδεκτή

h αποδεκτή $\Leftrightarrow h(n) \leq C(n)^*$ για κάθε κόμβο n όπου $C(n)^*$ είναι το κόστος του βέλτιστου μονοπατιού από τον n σε κόμβο τελικής κατάστασης.

h συνεπής $\Leftrightarrow h(n) \leq c(n \rightarrow n') + h(n')$ για κάθε n, n' και αποδείξαμε ότι

$$h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n_k) + h(n_k)$$

Αν $n = n_1$, n_k τελική κατάσταση και $c(n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n_k)$ το βέλτιστο μονοπάτι προς αυτήν, τότε

$$h(n) = h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n_k) + h(n_k) = C(n)^* + 0 \Rightarrow h(n) \leq C(n)^*$$

Άσκηση 4.1γ

Αποδείξτε ότι αν οι $\boldsymbol{h_1, \ldots, h_k}$ είναι αποδεκτές, τότε είναι αποδεκτή και η $\boldsymbol{h(n) = max\{h_1(n),\ \ldots, h_k(n)\}}$

h αποδεκτή $\Leftrightarrow h(n) \leq C(n)^*$ για κάθε κόμβο n όπου $C(n)^*$ είναι το κόστος του βέλτιστου μονοπατιού από τον n σε κόμβο τελικής κατάστασης.

Έστω τυχαίος κόμβος n. Αφού h_i αποδεκτή θα είναι $h_i(n) \leq C(n)^*$ για κάθε $i = 1, .., k$ οπότε και $\max\{h_1(n),\ \ldots, h_k(n)\} \leq C(n)^*$ δηλαδή $h(n) \leq C(n)^*$ που σημαίνει ότι h αποδεκτή.

Άσκηση 4.1δ

Αποδείξτε ότι αν οι $\boldsymbol{h_1, \ldots, h_k}$ είναι συνεπείς, τότε είναι συνεπής και η $\boldsymbol{h(n) = max\{h_1(n), \ldots, h_k(n)\}}$

h συνεπής $\Leftrightarrow h(n) \leq c(n \to n') + h(n')$ για κάθε n, n'

Έστω τυχαίοι κόμβοι n, n'. Αφού για κάθε $i = 1, .., k$ η h_i είναι συνεπής, θα ισχύει ότι

$$h_i(n) \leq c(n \to n') + h_i(n')$$

Επομένως,

$$h(n) = \max\{h_1(n), \ldots, h_k(n)\} \leq \max\{c(n \to n') + h_1(n'), \ \ldots, c(n \to n') + h_k(n')\} = c(n \to n') + \max\{h_1(n'), \ \ldots, h_k(n')\} = c(n \to n') + h(n')$$

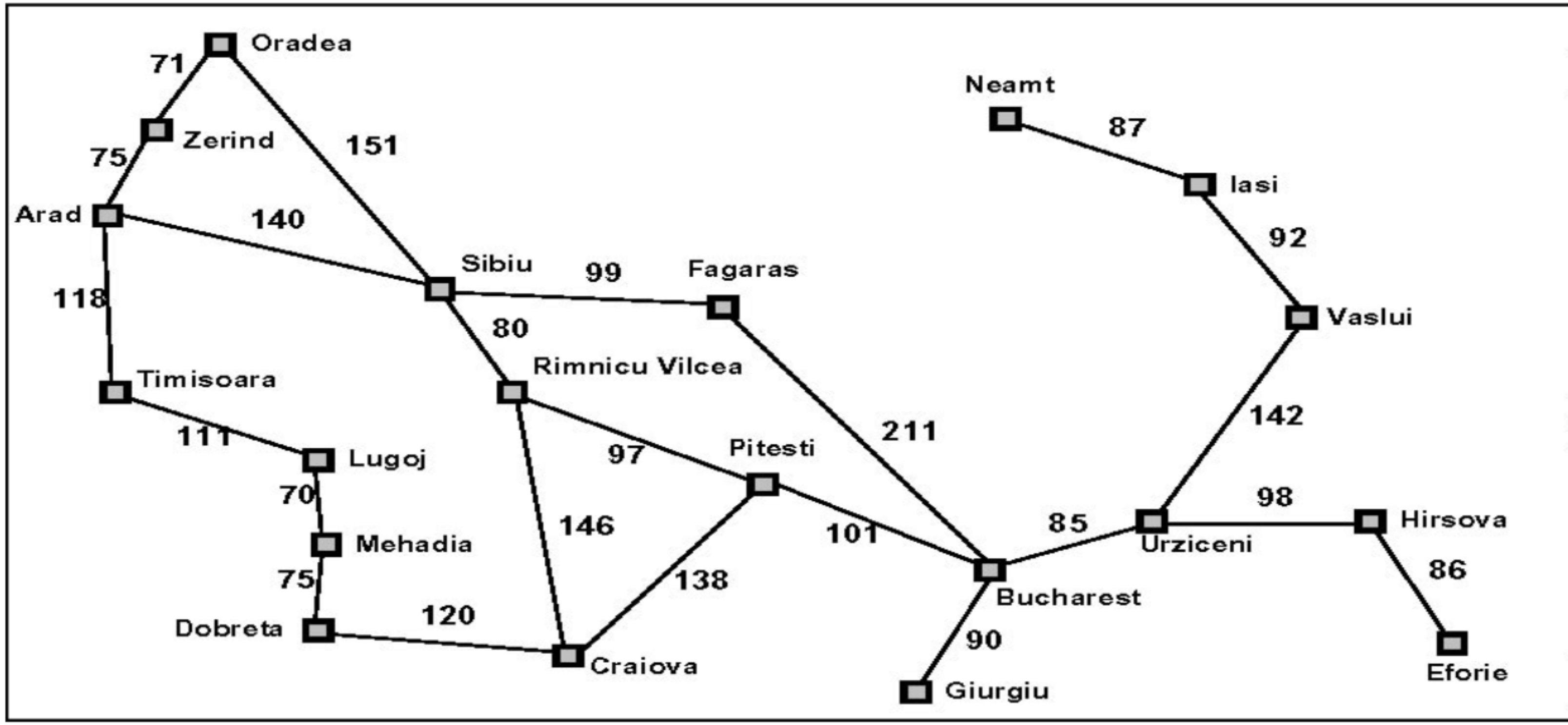
που σημαίνει ότι η h είναι συνεπής.

Άσκηση 4.1ε

Εξηγήστε γιατί με ιδανική ευρετική συνάρτηση, η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου $\boldsymbol{A^*}$ γίνεται $\boldsymbol{O(bd)}$

Η ιδανική ευρετική μάς καθοδηγεί να επιλέγουμε και να επεκτείνουμε κόμβους μόνο επί του βέλτιστου μονοπατιού. Οι κόμβοι αυτοί είναι d, όσοι και το βάθος της ρηχότερης λύσης. Σε κάθε κόμβο κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού παράγουμε όλα τα παιδιά του κόμβου, δηλαδή b παιδιά στη χειρότερη περίπτωση. Στη συνέχεια, ακολουθώντας την εκτίμηση της ιδανικής ευρετικής, επιλέγουμε το παιδί που συμμετέχει στο βέλτιστο μονοπάτι. Συνεπώς κάνουμε d βήματα κατά μήκος του βέλτιστου μονοπατιού και σε κάθε βήμα παράγουμε στη χειρότερη περίπτωση b παιδιά. Άρα η πολυπλοκότητα χρόνου θα είναι O(bd).

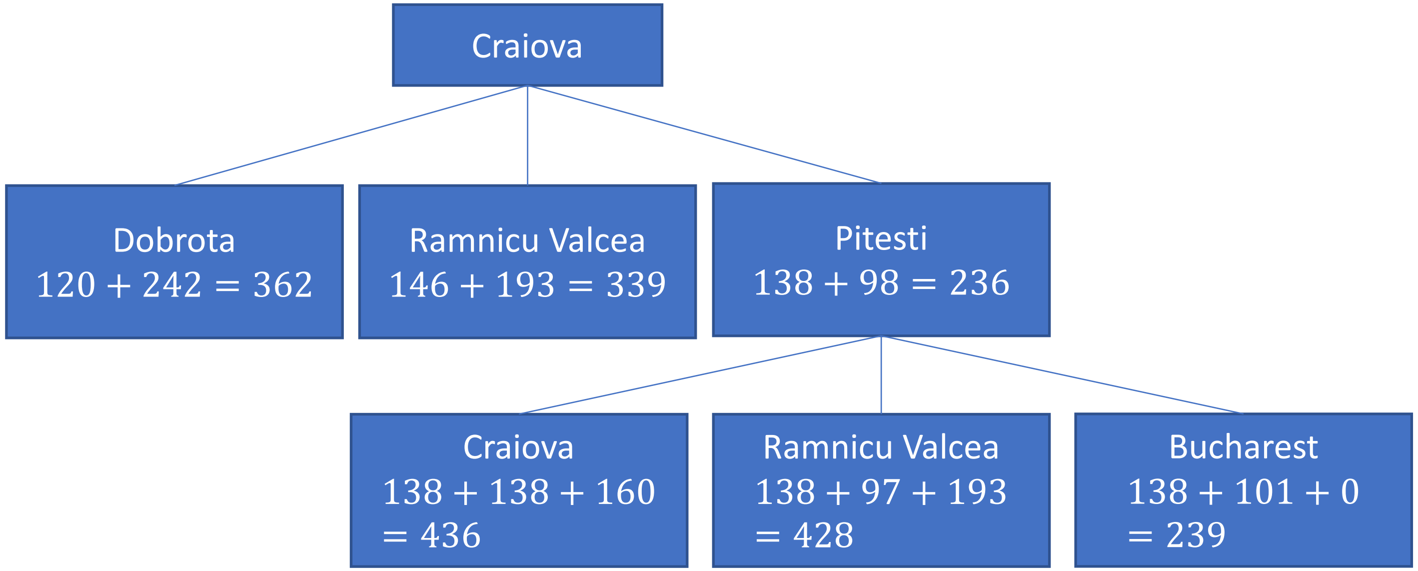
Άσκηση 4.2



Straight−line distance to Bucharest	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

a) **Σχεδιάστε το δέντρο αναζήτησης που κατασκευάζει ο αλγόριθμος μέχρι να ανακαλύψει το πρώτο μονοπάτι από την Craiova στο Βουκουρέστι. Το δέντρο να δείχνει και πώς αξιολογείται κάθε κόμβος.**

Άσκηση 4.2


Craiova
Dobrota
120 + 242 = 362
Ramnicu Valcea
146 + 193 = 339
Pitesti
138 + 98 = 236
Craiova
138 + 138 + 160 = 436
Ramnicu Valcea
138 + 97 + 193 = 428
Bucharest
138 + 101 + 0 = 239

Άσκηση 4.2

b) **Είναι αποδεκτή η ευρετική που χρησιμοποιούμε; Ναι ή όχι και γιατί;**
Η ευρετική συνάρτηση ισούται με την ευθεία απόσταση από μία πόλη προς το Βουκουρέστι οπότε υποεκτιμά την πραγματική οδική απόσταση και επομένως είναι αποδεκτή

c) **Μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο αλγόριθμος θα ανακαλύπτει πάντα το συντομότερο μονοπάτι προς το Βουκουρέστι, από όποια πόλη του χάρτη και αν ξεκινήσουμε; Ναι ή όχι και γιατί;**
Τα κόστη των μεταβάσεων είναι μεγαλύτερα από $\varepsilon > 0$ και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης b είναι πεπερασμένος οπότε το σύνολο των καταστάσεων είναι πεπερασμένο και άρα ο αλγόριθμος είναι πλήρης. Επιπλέον, αφού η ευρετική συνάρτηση είναι αποδεκτή θα είναι βέλτιστος.

d) **Είναι συνεπής η ευρετική που χρησιμοποιούμε; Ναι ή όχι και γιατί;**
Ναι, γιατί για κάθε κόμβο (πόλη) n στον οποίο βρισκόμαστε, η ευρετική εκτίμηση, δηλαδή η ευθεία απόσταση από τον n ως το στόχο (το Βουκουρέστι) είναι πάντα μικρότερη από (ή ίση με) την πραγματική (οδική, άρα μεγαλύτερη από την ευθεία) απόσταση από τον n ως έναν άλλο γειτονικό κόμβο n' (άλλη γειτονική πόλη) συν την ευρετική (ευθεία απόσταση) από τον n' ως το στόχο.

e) **Αν προσθέσουμε κλειστό σύνολο, είναι ο αλγόριθμος βέλτιστος; Ναι ή όχι και γιατί;**
Ναι, γιατί με συνεπή ευρετική ο A* παραμένει βέλτιστος ακόμα και όταν χρησιμοποιούμε κλειστό σύνολο.

Άσκηση 4.5α

- ∃ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι
- πεπερασμένος.
- Το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο.
- Χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο.
- Το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο).
- Εκτελούμε Α* με αποδεκτή αλλά όχι συνεπή ευρετική

Αποτέλεσμα του Α*;

Αφού το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο), το κόστος λύσης αυξάνεται κάθε φορά που κάνουμε μια μετάβαση, άρα το κόστος κάθε μετάβασης είναι θετικό. Με κόστος μετάβασης > 0 και b πεπερασμένο, ο Α* είναι πλήρης.

Οχι σίγουρα βέλτιστος, αφού έχουμε κλειστό σύνολο χωρίς συνεπή ευρετική. Ενδέχεται το μονοπάτι της βέλτιστης λύσης να πριονίζεται λόγω της χρήσης του κλειστού συνόλου

Άσκηση 4.5β

- ∃ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος.
- Το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο.
- Χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο.
- Το κόστος λύσης είναι αύξουσα συνάρτηση του βάθους (και μόνο).
- Εκτελούμε A* με αποδεκτή και συνεπή ευρετική

Αποτέλεσμα του A*;

Ο A* είναι πλήρης και άρα, αφού υπάρχει λύση, θα την βρει.

Με συνεπή ευρετική, ο A* παραμένει βέλτιστος ακόμα και όταν χρησιμοποιείται κλειστό σύνολο

Άσκηση 4.5γ

- $\nexists$ λύση
- Ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος.
- Το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο.
- Χρησιμοποιώ κλειστό σύνολο.
- Εκτελούμε Α* με μη αποδεκτή ευρετική

Αποτέλεσμα του Α*;

Τερματίζει πάντα. Με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων και κλειστό σύνολο δεν υπάρχουν άπειρα κλαδιά. Επίσης, αφού και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος, το δέντρο αναζήτησης που θα ψάξει ο Α* είναι πεπερασμένο. Αφού δεν υπάρχει λύση, ο Α* θα το ψάξει ολόκληρο και θα τερματίσει. Το ότι η ευρετική είναι μη αποδεκτή δεν παίζει ρόλο εδώ

Άσκηση 4.5δ

Σύγκριση πολυπλοκότητας χώρου των αλγορίθμων A* και αναρρίχησης λόφου (HC) χωρίς κλειστό σύνολο.

Χωρίς κλειστό σύνολο, ο αλγόριθμος αναρρίχησης λόφου κρατά σε κάθε βήμα του στη μνήμη το πολύ την τρέχουσα κατάσταση και τα b παιδιά της (τα οποία αξιολογεί, προκειμένου να επιλέξει την επόμενη κατάσταση στην οποία θα μεταβεί) → b+1. Αντιθέτως, ο A* κρατά στη μνήμη εν γένει πολλούς κόμβους του μετώπου της αναζήτησης (και τους προγόνους τους, αν θέλουμε να μας επιστρέψει το μονοπάτι της λύσης). Στη χειρότερη περίπτωση, μια ιδιαίτερα κακή ευρετική μπορεί να αναγκάσει τον A* να κρατήσει (π.χ. αμέσως πριν τερματίσει ανεπιτυχώς) στο μέτωπο της αναζήτησης όλους τους εκθετικά πολλούς (ως προς το βάθος) κόμβους του μέγιστου βάθους → b^m.

Άσκηση 4.6

Αποδείξτε ότι στο πρόβλημα των πλακιδίων η ευρετική που μετρά τον αριθμό πλακιδίων εκτός θέσης είναι συνεπής. <u>Υπόδειξη</u>: Σκεφτείτε πώς μεταβάλλεται η τιμή $h(n)$ της ευρετικής όταν από έναν κόμβο n μεταβούμε σε έναν άλλο κόμβο n' όπου το πλακίδιο που μετακινήθηκε (i) μπήκε στη θέση του ή (ii) ήταν εκτός θέσης και παρέμεινε εκτός θέσης ή (iii) ήταν στη θέση του και μετακινήθηκε σε λάθος θέση.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $h(n) \leq c(n,\alpha,n') + h(n')$ όπου $c(n,\alpha,n')$ το κόστος της μετακίνησης και $h(n), h(n')$ οι τιμές της ευρετικής στους κόμβους n, n' και αντίστοιχα.

i. Η κίνηση μετακινεί στη σωστή θέση ένα πλακίδιο που βρισκόταν σε λανθασμένη θέση. Τότε $h(n') = h(n) - 1$ και άρα $c(n,a,n') + h(n') = 1 + h(n) - 1 = h(n)$, οπότε η ανισότητα ισχύει (περίπτωση ισότητας).

ii. Η κίνηση μετακινεί ένα πλακίδιο από λανθασμένη θέση σε λανθασμένη θέση. Τότε $h(n') = h(n)$ και άρα $c(n,a,n') + h(n') = 1 + h(n) \geq h(n)$, οπότε η ανισότητα πάλι ισχύει.

iii. Η κίνηση μετακινεί σε λανθασμένη θέση ένα πλακίδιο που βρισκόταν στη σωστή θέση. Τότε $h(n') = h(n) + 1$ και άρα $c(n,a,n') + h(n') = 1 + h(n) + 1 \geq h(n)$, οπότε η ανισότητα πάλι ισχύει.