23/3/04

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

· ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ Η ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ.

· ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕ ΕΚΒΑΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

· ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ., ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ: Η $\tilde{X}$ ΠΑΙΡΝΕΙ ΜΙΑ ΑΠΟ Ν ΤΙΜΕΣ $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ.

· ΕΙΝΑΙ $\pi_i \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$

· ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΕΚΤΕΙΝΕΤΑΙ ΣΕ ΤΜ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΑΛΛΑ ΜΕ ∞ ΤΙΜΕΣ, ΚΑΙ ΣΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

· ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ Ή ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ Τ.Μ. - (EXPECTATION)

ΟΡΙΣΜΟΣ $$E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i$$

· ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΑΝ $N < \infty$, ΠΑΝΤΑ ΤΟ $E(\tilde{X})$ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΧΩΡΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ΑΛΛΑ ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η $E(\tilde{X})$ ΑΝ Η $\tilde{X}$ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΙΜΕΣ $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ;

· ΕΙΝΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΛΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ;
(ΝΑΙ! $\pi_i > 0$ ΚΑΙ $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$)

· ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΤΙΜΗ ΤΗΣ $E(\tilde{X})$;

ΙΔΙΟΤΗΣ 1

· ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΑΝ $\tilde{Y} = a\tilde{X}$, a ΣΤΑΘΕΡΑ

ΤΟΤΕ $$E(\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^{N} y_i \pi_i = \sum_{i=1}^{N} a x_i \pi_i = a \sum_{i=1}^{N} x_i \pi_i = a E(\tilde{X})$$

· ΕΣΤΩ $\tilde{Y}$ ΑΛΛΗ Τ.Μ. ΠΟΥ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΙΜΕΣ $y_1, \dots, y_M$

ΕΣΤΩ $P(\tilde{X}=x_i, \tilde{Y}=y_j) \equiv \pi_{ij}$, Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΠΑΡΗ Η $\tilde{X}$ ΤΙΜΗ x_i, **ΚΑΙ** Η $\tilde{Y}$ ΤΗΝ ΤΙΜΗ y_j

· ΠΡΟΦΑΝΩΣ · $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij} = 1$

$$\pi_i = P(\tilde{X}=x_i) = \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij}$$

$$\hat{\pi}_j = P(\tilde{Y}=y_j) = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ij}$$

<u>ΙΔΙΟΤΗΣ 2</u> $E(\tilde{X}+\tilde{Y}) = E(\tilde{X}) + E(\tilde{Y})$

· <u>ΑΠΛΟΥΣΤΕΥΜΕΝΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$$E(\tilde{X}+\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (x_i + y_j)\, \pi_{ij}$$

(Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΥΛΟΓΗ ΑΛΛΑ <u>ΔΕΝ</u> ΕΙΝΑΙ Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ $E(\tilde{X}+\tilde{Y})$ ΤΗΝ ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΟΜΩΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ...)

ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΟ;

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_i \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} y_j \pi_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{M} y_j \sum_{i=1}^{N} \pi_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i \pi_i + \sum_{j=1}^{M} y_j \hat{\pi}_j$$

$$= E(\tilde{X}) + E(\tilde{Y})$$

· <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Η ΣΧΕΣΗ ΙΣΧΥΕΙ <u>ΧΩΡΙΣ</u> ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ Ή ΑΛΛΕΣ !!

<u>ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ</u> $Var(\tilde{X}) \equiv E\{(\tilde{X} - E(\tilde{X}))^2\}$

ΘΑ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΚΑΙ $\bar{x}$ ΑΝΤΙ ΓΙΑ $E(\tilde{X})$

- ΙΣΧΥΕΙ $Var(\tilde{X}) = E(\tilde{X}^2) - \bar{x}^2$

· <u>ΙΔΙΟΤΗΣ 1</u> (α) $Var(\tilde{X} + c) = Var(\tilde{X})$

(β) $Var(a\tilde{X}) = a^2 Var(\tilde{X})$

ΓΙΑΤΙ ΙΣΧΥΟΥΝ; (α) $Var(\tilde{X}+c) =$

$E\{(\tilde{X}+\cancel{c} - E(\tilde{X}+\cancel{c}))^2\} = E\{(\tilde{X} - \bar{x})^2\} = Var\,\tilde{X}$

(β) Όμοια.

· <u>ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ</u> ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ Η <u>ΘΕΤΙΚΗ</u> ΤΕΤΡ. ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ, $\sigma = +\sqrt{Var(\tilde{X})}$

ΕΤΣΙ ΑΝ $\tilde{Y} = a\tilde{X}$ $\sigma_y = |a|\sigma_x$

ΚΑΙ <u>ΟΧΙ</u> $\sigma_y = a\sigma_x$ (ΠΟΥ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΑΝ $a < 0$)

26/3/04

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ</u>

. ΕΣΤΩ ΔΥΟ ΠΕΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- ΒΕΒΑΙΟ ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΗ r
- ΑΒΕΒΑΙΟ ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΗ $\tilde{R}$ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ $\bar{R}$ ΚΑΙ $\sigma^2 = Var(\tilde{R})$

· Τότε:

· ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΟ ΒΕΒΑΙΟ ΜΕΡΙΔΙΟΥ w ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, $1-w$ ΣΤΟ ΑΒΕΒΑΙΟ, w ΕΛΕΥΘΕΡΟ.

. ΑΝ $0 < w < 1$ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΥΟ ΠΣ

. ΑΝ $w > 1$ ΑΝΟΙΚΤΗ ΠΩΛΗΣΗ ΤΟΥ ΑΒΕΒΑΙΟΥ

. ΑΝ $w < 0$ ΔΑΝΕΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΟ ΑΒΕΒΑΙΟ $1-w > 1$

· ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

$$\tilde{R}_p = w r + (1-w)\tilde{R}$$

· $E(\tilde{R}_p) = \bar{R}_p = w r + (1-w)\bar{R}$

· $Var(\tilde{R}_p) = \sigma_p^2 = (1-w)^2 \sigma^2$

· ΚΑΙ $\sigma_p = |1-w| \cdot \sigma$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ w

ΑΝ $w < 1$ $\qquad \sigma_p = (1-w)\sigma$

ΚΑΙ $\bar{R}_p = w r + (1-w)\bar{R}$

ΑΠΟ ΤΗΝ 1η $w = 1 - \sigma_p/\sigma$ ΑΝΤΙΚΑΘ. ΣΤΗΝ 2η

$$\bar{R}_p = r + \sigma_p \cdot \frac{\bar{R} - r}{\sigma}$$

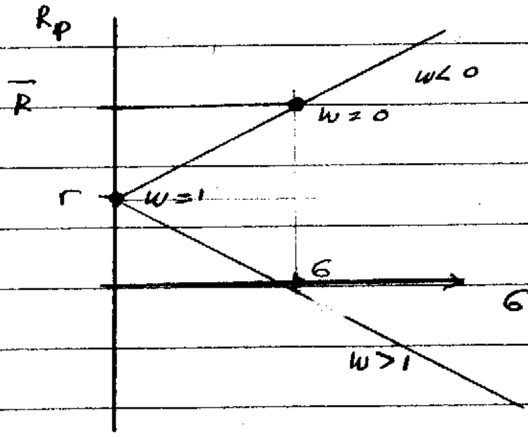
· ΑΝ $w > 1$ $\qquad \sigma_p = (w-1)\sigma \Rightarrow w = 1 + \frac{\sigma_p}{\sigma}$

ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΑΣ ΣΤΗΝ $\bar{R}_p = \ldots$ ΕΧΟΥΜΕ

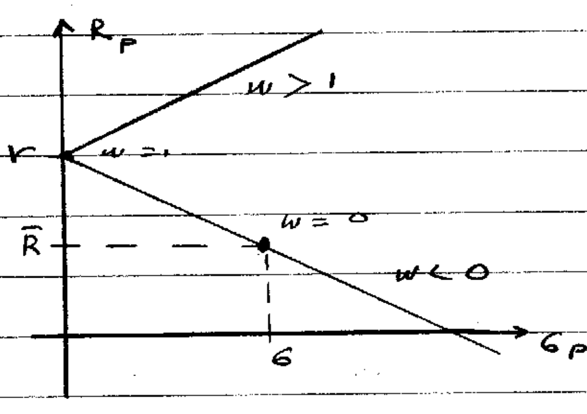
$$\bar{R}_p = r - \sigma_p \frac{\bar{R} - r}{\sigma}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ:

ΑΝ $r < \bar{R}$



ΑΝ $r > \bar{R}$



• ΟΙ ΠΑΝΩ ΗΜΙΕΥΘΕΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΤΙΜΟΤΕΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΠΕΝΔΥΤΕΣ ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ Ο ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΜΕΤΡΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ!

• ΣΤΟ 1° ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ <u>ΠΑΝΩ</u> ΑΠΟ $\bar{R}$ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΔΑΝΕΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΟ ΑΒΕΒΑΙΟ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> • ΕΣΤΩ $r = 5\%$ $\bar{R} = 8\%$ $\sigma = 20\%$ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΣΧΗΜΑΤΙΣΟΥΜΕ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΗ (ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ) ΑΝΩ ΤΟΥ 10% ΚΑΙ ΤΟΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΙΝΔΥΝΟ – ΤΥΠ. ΑΠΟΚΛΙΣΗ. ΠΟΙΟ ΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ; ΠΟΙΑ Η ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ;

ΣΤΟ 1° ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (ΕΦΟΣΟΝ $\bar{R} = 8\% > r = 5\%$)

ΙΣΧΥΕΙ $\bar{R}_p = r + \sigma_p \dfrac{\bar{R} - r}{\sigma}$ ΑΡΑ $\sigma_p = \dfrac{\bar{R}_p - r}{\bar{R} - r}\,\sigma$

Ή $\sigma_p = \dfrac{10-5}{8-5}\, 20\% = \dfrac{5}{3} \cdot 20\% = 33\,1/3\ \%$

ΚΑΙ $w = 1 - \dfrac{\sigma_p}{\sigma} = 1 - \dfrac{100/3}{20} = -2/3$

ΦΥΣΙΚΑ ΕΙΝΑΙ $\bar{R}_p = -2/3\ 5\% + (1 + 2/3)\, 8\% = 10\%$

• ΙΔΙΑ ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝ $\bar{R} = 3\%$

• ΕΦΟΣΟΝ $\bar{R} < r$ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟ 2° ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

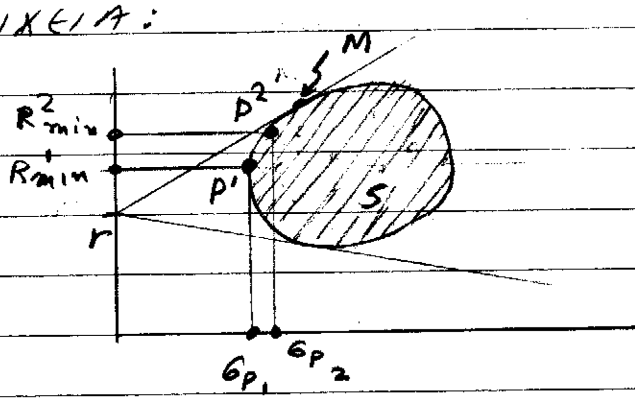
Ή $10\% = 5\% - \sigma_p \dfrac{3-5}{20}$ Ή $\sigma_p = 50\%$

ΕΝΩ $w = 1 + \dfrac{\sigma_p}{\sigma} = 1 + \dfrac{50}{20} = 3{,}5$ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΟΙΚΤΗ ΠΩΛΗΣΗ $1 - w = -2{,}5$ ΤΟΥ ΑΒΕΒΑΙΟΥ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

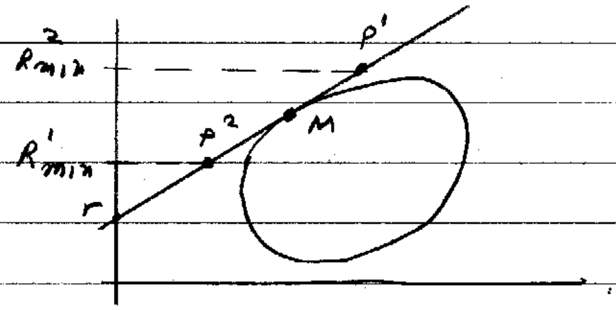
- ΑΝ ΠΑΛΙ Ο ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΜΕΤΡΑΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ, ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΓΟΡΑΣ

- ΕΣΤΩ ΤΟ ΧΩΡΙΟ S ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΑΠΟ ΑΒΕΒΑΙΑ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ:



- ΑΝ ΔΥΟ ΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΕΧΟΥΝ ΕΝΤΟΛΗ ΝΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΟΥΝ ΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΒΕΒΑΙΟΥ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΚΑΙ Ο ΠΡΩΤΟΣ ΕΧΕΙ ΚΑΤΩΤΕΡΗ ΕΠΙΔΟΣΗ R^1_{min} ΚΑΙ Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ R^2_{min}, ΑΥΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΣ ΣΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ P_1 ΚΑΙ P_2 ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΤΕΛΕΙΩΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ

- ΑΝ ΤΩΡΑ <u>ΕΠΙΤΡΑΠΕΙ</u> Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΒΕΒΑΙΟΥ ΠΕΡΙΟΥΣ. ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΕΣ ΟΤΙ ΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΗ $r - M$ ΠΟΥ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ
  – ΓΙΑΤΙ;



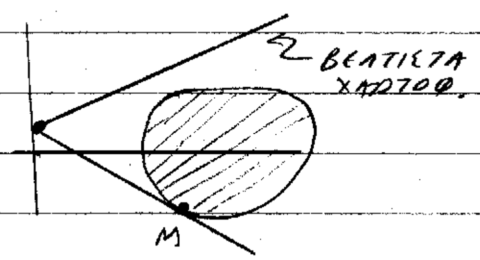
• ΤΟΤΕ ΟΙ ΔΥΟ ΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΘΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΟΥΝ ΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΑΒΕΒΑΙΩΝ Μ ΚΑΙ ΤΟΥ ΒΕΒΑΙΟΥ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟΥ ! Ο ΠΡΩΤΟΣ ΘΑ ΕΧΕΙ (ΣΤΟ ΣΧΗΜΑ) $0<w_1<1$ ΕΝΩ Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ $w_2<0$

• ΑΝ ΟΛΟΙ ΟΙ ΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΙΔΙΟ ΜΕΤΡΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ, ΘΑ ΕΠΕΝΔΥΣΟΥΝ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΑΒΕΒΑΙΩΝ, ΤΟ Μ.

• ΑΝ ΠΑΛΙ ΟΙ ΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ, ΤΟ Μ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΠΑΡΑ ΝΑ ΕΧΕΙ ΜΕΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΤΙΤΛΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΑ ΜΕΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΤΙΤΛΩΝ ΣΤΗΝ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

• ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΑΥΤΕΣ ΟΦΕΙΛΟΝΤΑΙ ΣΤΟΝ SHARPE ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ Η ΒΑΣΗ ΤΟΥ CAPM - CAPITAL ASSET PRICING MODEL.

• ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΚΟΠΙΜΗ Η ΑΝΟΙΚΤΗ ΠΩΛΗΣΗ ΚΑΘΩΣ ΤΟΤΕ ΟΛΟΙ ΘΑ ΕΠΙΘΥΜΟΥΣΑΝ ΝΑ ΠΩΛΗΣΟΥΝ ΤΟ Μ !



ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΠΟΛΛΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

· ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ:
ΕΙΝΑΙ $Var(a\tilde{X}+\beta\tilde{Y}) =$

$$E\left\{\left[a(\tilde{X}-\bar{X})+\beta(\tilde{Y}-\bar{Y})\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{a^2(\tilde{X}-\bar{X})^2+\beta^2(\tilde{Y}-\bar{Y})^2+2a\beta(\tilde{X}-\bar{X})(\tilde{Y}-\bar{Y})\right\}$$

$$= a^2 Var(\tilde{X}) + \beta^2 Var(\tilde{Y}) + 2a\beta\, Cov(\tilde{X},\tilde{Y})$$

ΟΠΟΥ $Cov(\tilde{X},\tilde{Y}) = E\left\{(\tilde{X}-\bar{X})(\tilde{Y}-\bar{Y})\right\} = Cov(\tilde{Y},\tilde{X})$

· ΦΥΣΙΚΑ $Cov(\tilde{X},\tilde{X}) = Var(\tilde{X})$ (ΓΙΑΤΙ;)

· ΜΕ ΤΟΥΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΥΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ:

$$Var(a\tilde{X}+\beta\tilde{Y}) = (a,\beta)\, C_{X,Y}\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$$

ΟΠΟΥ $C_{X,Y} = \begin{bmatrix} Cov(\tilde{X},\tilde{X}) & Cov(\tilde{X},\tilde{Y}) \\ Cov(\tilde{Y},\tilde{X}) & Cov(\tilde{Y},\tilde{Y}) \end{bmatrix}$

· ΓΕΝΙΚΑ $Var\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\tilde{X}_i\right) = (a_1,\ldots,a_N)\, C_{X_1,\ldots,X_N}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$

$C_{X_1,\ldots,X_N}$: $N\times N$ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

$$\left\{C_{X_1,\ldots}\right\}_{i,j} = Cov(\tilde{X}_i,\tilde{X}_j)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ $C_{X_1,\ldots,X_N}$ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΑ ΗΜΙΟΡΙΣΜΕΝΟΣ. (ΓΙΑΤΙ;)